$\boxed{\text{B96}}$

次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{1+\left(1+2015+2015^2\right)\sqrt[3]{1+\left(1+2014+2014^2\right)\sqrt[3]{1+\left(1+2013+2013^2\right)\sqrt[3]{1+\left(1+2012+2012^2\right)\sqrt[3]{1+\left(1+2011+2011^2\right)\times 2010}}}}}$

(2) $\sqrt[m]{1+\sum_{r=0}^{m-1}(n+k)^r\sqrt[m]{1+\sum_{r=0}^{m-1}(n+k-1)^r\sqrt[m]{1+\sum_{r=0}^{m-1}(n+k-2)^r\sqrt[m]{1+\cdots\cdots\cdots\cdots\sqrt[m]{1+\sum_{r=0}^{m-1}(n+2)^r\sqrt[m]{1+n\sum_{r=0}^{m-1}(n+1)^r}}}}}}$

ただし，$k,m,n$ は正の整数で，$m \geqq 2$ とする。

（解）

(1)　一般に，$\sqrt[3]{1+\left(1+k+k^2\right)(k-1)}=\sqrt[3]{1+k^3-1}=k$ であるから，$k=2012,2013,\cdots$ と代入していくと

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \sqrt[3]{1+\left(1+2015+2015^2\right)\sqrt[3]{1+\left(1+2014+2014^2\right)\sqrt[3]{1+\left(1+2013+2013^2\right)\sqrt[3]{1+\left(1+2012+2012^2\right)\times 2011}}}} \\
&= \sqrt[3]{1+\left(1+2015+2015^2\right)\sqrt[3]{1+\left(1+2014+2014^2\right)\sqrt[3]{1+\left(1+2013+2013^2\right)\times 2012}}} \\
&= \sqrt[3]{1+\left(1+2015+2015^2\right)\sqrt[3]{1+\left(1+2014+2014^2\right)\times 2013}} \\
&= \sqrt[3]{1+\left(1+2015+2015^2\right)\times 2014} \\
&= 2015\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

(2) $\sum_{r=0}^{m-1}(n+1)^r$ は，初項 1，公比 $n+1$，項数 $m$ の等比数列の和であるから

$\sqrt[m]{1+n\sum_{r=0}^{m-1}(n+1)^r}=\sqrt[m]{1+n\times\dfrac{(n+1)^m-1}{(n+1)-1}}=\sqrt[m]{1+(n+1)^m-1}=n+1$ である。(1)と同様に，

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \sqrt[m]{1+\sum_{r=0}^{m-1}(n+k)^r\sqrt[m]{1+\sum_{r=0}^{m-1}(n+k-1)^r\sqrt[m]{1+\sum_{r=0}^{m-1}(n+k-2)^r\sqrt[m]{1+\cdots\cdots\cdots\cdots\sqrt[m]{1+(n+1)\sum_{r=0}^{m-1}(n+2)^r}}}}} \\
&= \sqrt[m]{1+\sum_{r=0}^{m-1}(n+k)^r\sqrt[m]{1+\sum_{r=0}^{m-1}(n+k-1)^r\sqrt[m]{1+\sum_{r=0}^{m-1}(n+k-2)^r\sqrt[m]{1+\cdots\cdots\cdots\cdots\sqrt[m]{1+(n+2)\sum_{r=0}^{m-1}(n+3)^r}}}}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \sqrt[m]{1+\sum_{r=0}^{m-1}(n+k)^r\sqrt[m]{1+\sum_{r=0}^{m-1}(n+k-1)^r\sqrt[m]{1+(n+k-3)\sum_{r=0}^{m-1}(n+k-2)^r}}} \\
&= \sqrt[m]{1+\sum_{r=0}^{m-1}(n+k)^r\sqrt[m]{1+(n+k-2)\sum_{r=0}^{m-1}(n+k-1)^r}} \\
&= \sqrt[m]{1+(n+k-1)\sum_{r=0}^{m-1}(n+k)^r} \\
&= n+k\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

（2014/1/22　時岡）