$\boxed{\text{B97}}$

三角形 OAB の OA 上に n 個の点 A_1, A_2, ･･･, A_n を O に近いところから，OB 上に n 個の点 B_1, B_2, ･･･, B_n を O に近いところから，$\angle OA_1B_1$

$=\angle A_1B_1B^2=\angle A_1A_2B_2$

$=\angle A_2B_2B_3=\angle A_2A_3B_3$

$=\angle A_3B_3B_4=\angle A_3A_4B_4$

････････････････････

$=\angle A_nB_nB=\angle A_nAB$

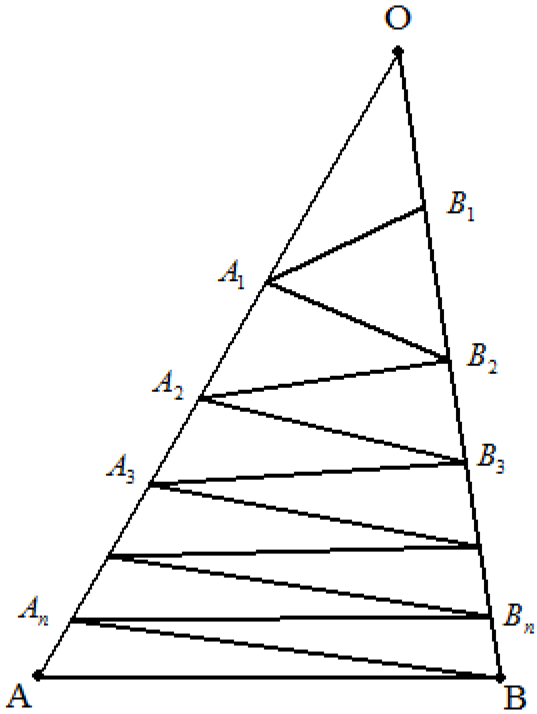
となるようにとる。

OA$=a$，OB$=b$ のとき，

(1) OA_k, OB_k（k＝1, 2, 3, ･･･, n）を求めよ。

(2) A_kA_{k+1}, B_kB_{k+1}（k＝1, 2, 3, ･･･, n）を求めよ。

(3) $A_kA_{k+1}\times B_kB_{k+1}$（k＝1, 2, 3, ･･･, n）を求めよ。



（解）

(1)　$\angle AOB=\alpha$，$OA_1=p$，$OB_1=q$ とおくと，

$$\triangle OA_1B_1=\frac{1}{2}pq\sin\alpha$$

$$\triangle OA_1B_2=\frac{1}{2}pOB_2\sin\alpha=2\times\frac{1}{2}pq\sin\alpha \text{ より}\quad OB_2=2q$$

$$\triangle OA_2B_2=\frac{1}{2}OA_2\cdot 2q\sin\alpha=3\times\frac{1}{2}pq\sin\alpha \text{ より}\quad OA_2=\frac{3}{2}p$$

$$\triangle OA_2B_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}pOB_3\sin\alpha=4\times\frac{1}{2}pq\sin\alpha \text{ より}\quad OB_3=\frac{8}{3}q$$

$$\triangle OA_3B_3=\frac{1}{2}OA_3\cdot\frac{8}{3}q\sin\alpha=5\times\frac{1}{2}pq\sin\alpha \text{ より}\quad OA_3=\frac{15}{8}p$$

･･

$$\triangle OA_kB_k=\frac{1}{2}OA_k\cdot OB_k\sin\alpha=(2k-1)\times\frac{1}{2}pq\sin\alpha\ \cdots①$$

$$\triangle OA_kB_{k+1}=\frac{1}{2}OA_k\cdot OB_{k+1}\sin\alpha=2k\times\frac{1}{2}pq\sin\alpha\ \cdots②$$

$$\triangle OA_{k+1}B_{k+1}=\frac{1}{2}OA_{k+1}\cdot OB_{k+1}\sin\alpha=(2k+1)\times\frac{1}{2}pq\sin\alpha\ \cdots③$$

③÷②より

$$\frac{OA_{k+1}}{OA_k}=\frac{2k+1}{2k}$$

ここで k に $k-1, k-2, \cdots, 2, 1$ を代入して，辺々かけあわせると

$$\frac{OA_k}{OA_1}=\frac{2k-1}{2k-2}\cdot\frac{2k-3}{2k-4}\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2k-2)}\times\frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdot(2k-2)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdot(2k-2)}=\frac{(2k-1)!}{\{(k-1)!2^{k-1}\}^2}$$

$OA_1=p$ より $OA_k=\dfrac{(2k-1)!}{\{(k-1)!2^{k-1}\}^2}p\cdots④$

$OA_{n+1}=\dfrac{(2n+1)!}{(n!2^n)^2}p=OA=a$ より

$p=\dfrac{(n!2^n)^2}{(2n+1)!}a$ を④に代入すると

$OA_k=\dfrac{(2k-1)!}{\{(k-1)!2^{k-1}\}^2}\cdot\dfrac{(n!2^n)^2}{(2n+1)!}a\cdots⑤$　（答）

同様に，②÷①より

$\dfrac{OB_{k+1}}{OB_k}=\dfrac{2k}{2k-1}$

ここで k に $k-1,k-2,\cdots,2,1$ を代入して，辺々かけあわせると

$$\frac{OB_k}{OB_1}=\frac{2k-2}{2k-3}\cdot\frac{2k-4}{2k-5}\cdots\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{1}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdot(2k-2)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-3)}\times\frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdot(2k-2)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdot(2k-2)}=\frac{\{(k-1)!2^{k-1}\}^2}{(2k-2)!}$$

$OB_1=q$ より $OB_k=\dfrac{\{(k-1)!2^{k-1}\}^2}{(2k-2)!}q\cdots⑥$

$OB_{n+1}=\dfrac{(n!2^n)^2}{(2n)!}q=OB=b$ より

$q=\dfrac{(2n)!}{(n!2^n)^2}b$ を⑥に代入すると

$OB_k=\dfrac{\{(k-1)!2^{k-1}\}^2}{(2k-2)!}\cdot\dfrac{(2n)!}{(n!2^n)^2}b\cdots⑦$　（答）

(2)　⑤より

$$A_kA_{k+1}=OA_{k+1}-OA_k=\left[\frac{(2k+1)!}{(k!2^k)^2}-\frac{(2k-1)!}{\{(k-1)!2^{k-1}\}^2}\right]\cdot\frac{(n!2^n)^2}{(2n+1)!}a=\frac{(2k)!}{(k!2^k)^2}\cdot\frac{(n!2^n)^2}{(2n+1)!}a\cdots$$（答）

⑦より

$$B_kB_{k+1}=OB_{k+1}-OB_k=\left[\frac{(k!2^k)^2}{(2k)!}-\frac{\{(k-1)!2^{k-1}\}^2}{(2k-2)!}\right]\cdot\frac{(2n)!}{(n!2^n)^2}b=\frac{\{(k-1)!2^{k-1}\}^2}{(2k-1)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!2^n)^2}b\cdots$$（答）

(3)　(2)より

$$A_kA_{k+1}\times B_kB_{k+1}=\frac{(2k)!}{(k!2^k)^2}\cdot\frac{(n!2^n)^2}{(2n+1)!}a\times\frac{\{(k-1)!2^{k-1}\}^2}{(2k-1)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!2^n)^2}b=\frac{ab}{2k(2n+1)}\cdots$$（答）

（2014/1/29　時岡）