趣味の数学問題集・B 問題の答

151　略

152　$7\sqrt{10}$

153　$\dfrac{15\sqrt{30+2\sqrt{193}}}{2}$

154　$\dfrac{3\sqrt{3430+14\sqrt{53305}}}{2}$

155　$r^6-70r^4+469r^2-180=0$　（r≒7.9087，面積≒221.4440）

156　略

157　(1)　$n=6886$　　(2)　$n=9778$　　(3)　$n=12678$

158　$y=\dfrac{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5}x^2-\dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}x-\dfrac{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}$

159　$y=2\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,x^3-(3-\sqrt{5})x^2-\dfrac{\sqrt{25+5\sqrt{5}}}{2}x+1$

160　$y=\dfrac{4}{\sqrt{7}}x^2-\dfrac{1}{\sqrt{7}}x-\dfrac{3}{\sqrt{7}}\left(=\dfrac{1}{\sqrt{7}}(x-1)(4x+3)\right)$

161　$\dfrac{7}{4}$　一般に，BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$，BD$=d$ のとき，EC$=\dfrac{ab^2d}{ac^2+(b^2-c^2)d}$

162　$\dfrac{15}{8}$　一般に，BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$，BD$=\dfrac{ac^2(b^2-c^2)}{(ab+b^2-c^2)(ab-b^2+c^2)}$

163　EF$=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}\left(\cos 5^\circ-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

164　EF$=2(\sqrt{3}-1)\left(\cos 5^\circ-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

165　(1)　$\dfrac{bc\sin A}{b\sin\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)A+c\sin\dfrac{A}{2^n}}$　　(2)　$\dfrac{c\sin\dfrac{A}{2}(b^2+c^2-2bc\cos A)}{b\sin\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)A+c\sin\dfrac{A}{2^n}}$

166　AQ$=\dfrac{(a+b+c)(-a+b+c)}{b+c}-x$

167　(1)　$\sqrt{2}$　　(2)　$\dfrac{1}{8}(b+c)\sqrt{6bc-b^2-c^2}$

168　$\dfrac{\triangle PQR}{\triangle ABC}=\dfrac{a^3-a^2c+ac^2-ab^2-b^2c+c^3}{a(2a+c)(a+b+c)(a-b+c)(3a^2+b^2-c^2)}$

例　$a=8,\ b=7,\ c=5$ のとき，$\dfrac{\triangle PQR}{\triangle ABC}=\dfrac{5}{1512}$

169　$\dfrac{\triangle PQR}{\triangle ABC}=\dfrac{\{\sin(2A+\theta)+\sin(2B+\theta)+\sin(2C+\theta)-3\sin\theta\}^2}{16\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C}$

170　$\dfrac{1}{9}$

171　$\dfrac{S}{2m+1}$

172　A$\left(\dfrac{c^2-b^2}{2a},\ \dfrac{a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2}{8aS}\right)$，B$\left(-\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a(b^2+c^2-a^2)}{8S}\right)$，C$\left(\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a(b^2+c^2-a^2)}{8S}\right)$

ただし，$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\dfrac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}$，$\left(s=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$

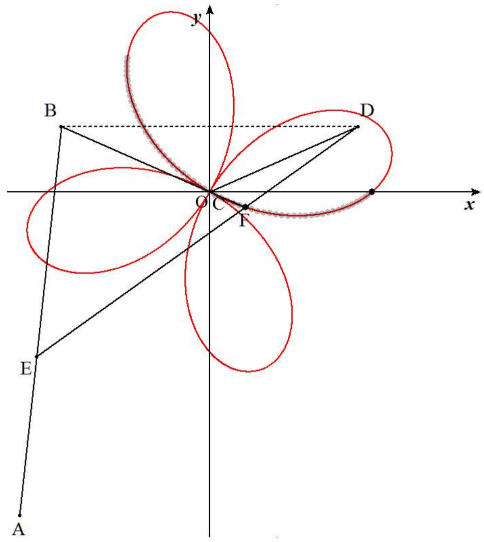
173　(1)　60°

(2)　$(x^2+y^2)^3=\dfrac{a^2}{3}(\sqrt{3}\,x^2+2xy-\sqrt{3}\,y^2)^2$

変形すると，$r=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$

これは，四葉線 $r=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\cos 2\theta$ を，原点の周りに $\dfrac{\pi}{6}$ だけ

回転したグラフの一部である。（$\dfrac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$）



174　(1)　$\dfrac{1}{6\sqrt{3}}a^2\sqrt{2b^2-a^2}$　　(2)　$a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}b$ のとき，最大値 $\dfrac{2}{9\sqrt{3}}b^3$

175　35 枚

176　略

177　(1)　第 2 円の中心の y 座標 $y_2=4$，半径 $r_2=2$　　(2)　第 3 円の中心の y 座標 $y_3=11$，半径 $r_3=5$

(3)　第 n 円の中心の y 座標 $y_n=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}$，

半径 $r_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right\}$

中心が y 軸上にあり，リュカ数列：1，3，4，7，11，18，29，47，76，…の奇数番目の項が中心の y 座標となり，フィボナッチ数列：1，1，2，3，5，8，13，21，34，…の奇数番目の項が半径となる。

178　(1)　第 2 円の中心の y 座標 $y_2=7$，半径 $r_2=3$　　(2)　第 3 円の中心の y 座標 $y_3=18$，半径 $r_3=8$

(3)　第 n 円の中心の y 座標 $y_n=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}$，

半径 $r_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right\}$

中心が y 軸上にあって，リュカ数列：1，3，4，7，11，18，29，47，76，…の偶数番目の項が中心の y 座標となり，フィボナッチ数列：1，1，2，3，5，8，13，21，34，…の偶数番目の項が半径となる。

179　$-(16-10\sqrt{2}+8\sqrt{3}-6\sqrt{6})^6$

180　(1)　$\dfrac{121}{135}$　　(2)　$a_n=\dfrac{2^{n-1}-n+1}{2^{n-1}+n-1}$

181　(1)　$-\dfrac{9}{10}$，$-\dfrac{17}{18}$　　(2)　$a_n=-\dfrac{2n-1}{\sqrt{2}\,n}\sin\dfrac{2n-1}{n}\pi$

182　(1)　$\dfrac{a(ad+bc)}{c(ab+cd)}$　　(2)　$\sqrt{\dfrac{ad}{bc}}$　（Hint：B1511の定理を使う。）

183　S$=\dfrac{(3b^2-8ac)^{\frac{5}{2}}}{960a^4}$

184　S$=\dfrac{D^{\frac{3}{2}}}{12\sqrt{a_1a_2}(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2})^2}$，　$D=(b_1-b_2)^2-4(a_1-a_2)(c_1-c_2)$

※2つの放物線と共通接線で囲まれる部分は2つできるが，その2つは等しい。

従って，片方なら，S$=\dfrac{D^{\frac{3}{2}}}{24\sqrt{a_1a_2}(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2})^2}$ ★となる。

185　S$=\dfrac{|b_1-b_2|^3}{96a^2}$　（前問の★で，$a_1=a_2=a$ とおいたもの。）

186　$a=32$，$b=29$，$c=29$

187　54（個）

188　(1)　$r_1=\dfrac{-4-2\sqrt{5}+\sqrt{50+22\sqrt{5}}}{4}$　　(2)　$r_2=\dfrac{2+\sqrt{5}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4}$

189　略

190　$\dfrac{6935+2184\sqrt{10}}{364}$

191　n

192　3

193　略

194　$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

195　(1)　(1, 5)　　(2)　382　　(3)　$(m,\ n)=(7,\ 45)$

196　(1)　$-25<abc<7$　　(2)　$-1<a<1$，$1<b<5$，$5<c<7$　　(3)　解なし

197　$a=3-\sqrt{7}$，$b=2$，$c=4$，$d=3+\sqrt{7}$

198　略

199　7

200　(1)　略　　(2)　3