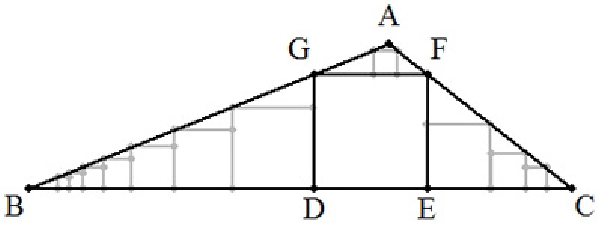
右図のように，BC＝7，CA＝3，AB＝5 の三角形 ABC に内接する正方形 DEFG に連結する無限個の正方形を考える。このとき，三角形 ABC 内のすべての正方形の面積和を求めよ。



（解）A から BC に下ろした垂線の足を H とする。

$\cos A=\dfrac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5}=-\dfrac{1}{2},0°<A<180°$ より A＝120°

⊿ABC の面積を考えると，$\dfrac{1}{2}\cdot7\cdot AH=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot5\sin120°$ より $AH=\dfrac{15\sqrt{3}}{14}$

いま，$DE=x,BD=y,CE=z$ とおく。

$$x=\frac{BC\cdot AH}{BC+AH}=\frac{7\cdot\dfrac{15\sqrt{3}}{14}}{7+\dfrac{15\sqrt{3}}{14}}=\frac{105\left(-45+98\sqrt{3}\right)}{8929}$$

$\cos B=\dfrac{5^2+7^2-3^2}{2\cdot5\cdot7}=\dfrac{13}{14},\sin B=\sqrt{1-\left(\dfrac{13}{14}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{14},\tan B=\dfrac{3\sqrt{3}}{13}$ より

$$y=\frac{GD}{\tan B}=\frac{x}{\tan B}=\frac{\dfrac{105\left(-45+98\sqrt{3}\right)}{8929}}{\dfrac{3\sqrt{3}}{13}}=\frac{455\left(98-15\sqrt{3}\right)}{8929}$$

同様に，$\cos C=\dfrac{7^2+3^2-5^2}{2\cdot7\cdot3}=\dfrac{11}{14},\sin B=\sqrt{1-\left(\dfrac{11}{14}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14},\tan B=\dfrac{5\sqrt{3}}{11}$ より

$$z=\frac{FE}{\tan C}=\frac{x}{\tan C}=\frac{\dfrac{105\left(-45+98\sqrt{3}\right)}{8929}}{\dfrac{5\sqrt{3}}{11}}=\frac{231\left(98-15\sqrt{3}\right)}{8929}$$

三角形 ABC を線分 GD，FE で 3 分割して考える。

[1]　五角形 AGDEF に含まれるすべての正方形の面積和を S(A)

[2]　⊿GBD に含まれるすべての正方形の面積和を S(B)

[3]　⊿FCE に含まれるすべての正方形の面積和を S(C)

とする。

[1]　⊿AGF に含まれる最初の正方形の辺の長さをαとする。

⊿AGF∽⊿ABC より，α：GF＝GF：BC，α：x＝x：7，∴α＝$\dfrac{x^2}{7}=x\times\dfrac{x}{7}$

この長さは正方形 DEFG の辺の長さの $\dfrac{x}{7}\left(0<\dfrac{x}{7}<1\right)$ 倍であるから，

以下，正方形の辺の長さは$\dfrac{x}{7}$倍ずつ小さくなっていく。

S(A)は無限等比級数で，初項は正方形 DEFG の面積x^2で，　公比は$\left(\dfrac{x}{7}\right)^2$であるから

S(A)＝$x^2 \times \dfrac{1}{1-\left(\dfrac{x}{7}\right)^2} = \dfrac{49x^2}{49-x^2} = \dfrac{675\left(49-15\sqrt{3}\right)}{6904}$　…①

[2]　⊿GBD に含まれる最初の正方形の辺の長さをβとする。

$\beta = \dfrac{BD \cdot GD}{BD+GD} = \dfrac{yx}{y+x} = x \times \dfrac{y}{x+y}$

この長さは正方形 DEFG の辺の長さ GD の$\dfrac{y}{x+y}\left(0 < \dfrac{y}{x+y} < 1\right)$倍であるから，

以下，正方形の辺の長さは$\dfrac{y}{x+y}$倍ずつ小さくなっていく。

S(B)は無限等比級数で，初項は一辺βの正方形の面積$\left(\dfrac{xy}{x+y}\right)^2$で，　公比は$\left(\dfrac{y}{x+y}\right)^2$であるから

S(B)＝$\left(\dfrac{xy}{x+y}\right)^2 \times \dfrac{1}{1-\left(\dfrac{y}{x+y}\right)^2} = \dfrac{xy^2}{x+2y} = \dfrac{621075\left(-321831+293714\sqrt{3}\right)}{51742849609}$　…②

[3]　[2]と同様に

S(C)＝$\dfrac{xz^2}{x+2z} = \dfrac{266805\left(-348225+270238\sqrt{3}\right)}{32608359769}$　…③

以上，①，②，③より

S(A)＋S(B)＋S(C)＝$\dfrac{15\left(-18716301655917075+41592656472339421\sqrt{3}\right)}{146108147183519224}$　…（答）

＝5.4744680844821714001

（2011/12/13　時岡）