

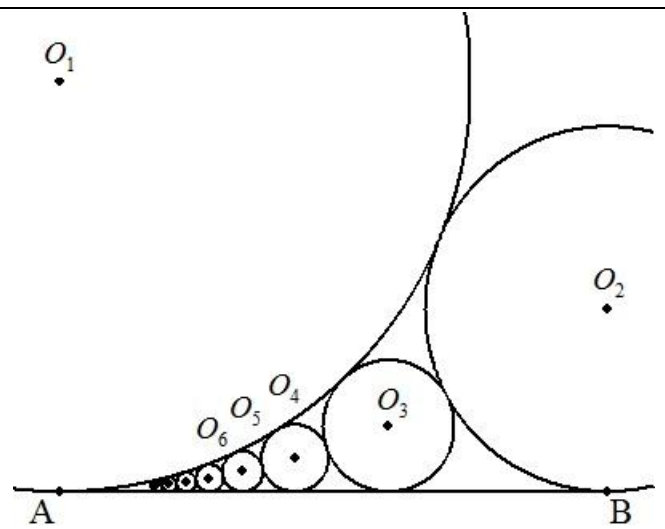
半径 9 の円 O_1 と半径 4 の円 O_2 が外接していて、線分 AB は 2 円の共通接線である。

線分 AB に接して、2 円 O_1, O_2 に外接する円を O_3 ,

線分 AB に接して、2 円 O_1, O_3 に外接する円を O_4 ,

以下同様に円 $O_5, O_6, \dots$ を考える。

このとき、円 $O_3, O_4, O_5, \dots$ すべての面積和 S_C を求めよ。



(解) 三平方の定理より $AB = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} = 2\sqrt{r_1 r_2}$ である。

いま、円 O_i の半径を r_i とおく。

円 O_1, O_2, O_3 について、円 O_3 と線分 AB の接点を C とすると $AC = 2\sqrt{r_1 r_3}$, $CB = 2\sqrt{r_3 r_2}$ である。

これらを $AB = AC + CB$ に代入すると $2\sqrt{r_1 r_2} = 2\sqrt{r_1 r_3} + 2\sqrt{r_3 r_2}$ $\therefore \frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$

同様に、円 O_1, O_3, O_4 について $\frac{1}{\sqrt{r_4}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{2}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$

同様に、円 O_1, O_4, O_5 について $\frac{1}{\sqrt{r_5}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_4}} = \frac{3}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$

.....

同様に、円 O_1, O_{n-1}, O_n について $\frac{1}{\sqrt{r_n}} = \frac{n-2}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$ (注 1)

ここで、 $r_1 = 9, r_2 = 4$ であるから $\frac{1}{\sqrt{r_n}} = \frac{n-2}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{2n-1}{6}$

$\therefore r_n = \left(\frac{6}{2n-1} \right)^2 (n = 3, 4, 5, \dots)$

$S_C = \pi \left(\frac{6}{5} \right)^4 + \pi \left(\frac{6}{7} \right)^4 + \pi \left(\frac{6}{9} \right)^4 + \dots = 6^4 \pi \left\{ \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots \right) - \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} \right) \right\}$

ここで、 $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots = \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ であるから (注 2)

$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots = \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots \right) - \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \dots \right)$

$= \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots \right) - \frac{1}{2^4} \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots \right)$

$= \frac{\pi^4}{90} - \frac{1}{16} \cdot \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{96}$

よって

$$S_c = 6^4 \pi \left(\frac{\pi^4}{96} - \frac{82}{81} \right) = \frac{\pi}{2} (27\pi^4 - 2624) \dots (\text{答})$$
$$= 9.496183091$$

(注1) 数列 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{r_n}} \right\}$ は初項 $\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, 公差 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{r_1}} \right\}$ の等差数列であるから, $n \geq 3$ のとき

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} + (n-3) \cdot \frac{1}{\sqrt{r_1}} = \frac{n-2}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

(注2) リーマンのゼータ関数 $\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots$ について

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \text{ の証明}$$

今, $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$ とおくと, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ であるから (テイラー展開),

$$f(x) = x - \frac{\pi^2 x^3}{3!} + \frac{\pi^4 x^5}{5!} - \frac{\pi^6 x^7}{7!} + \dots \quad \textcircled{1}$$

また, 方程式 $f(x) = 0$ の解は $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

よって

$$f(x) = x \left(1 - \frac{x^2}{1^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2} \right) \dots \quad (\text{オイラー})$$

$$= x - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) x^3 + \left(\frac{1}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{1^2 \cdot 4^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{1^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} + \dots \right) x^5 - \dots$$

$$= x - \zeta(2)x^3 + \frac{1}{2}(\zeta(2)^2 - \zeta(4))x^5 - \dots \quad \textcircled{2}$$

①, ②の係数を比較すると

$$-\zeta(2) = -\frac{\pi^2}{6}, \frac{1}{2}(\zeta(2)^2 - \zeta(4)) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\therefore \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \quad (\text{終証})$$

(2012/1/20 時岡)