

容積が一定の直円錐の容器を作り、その側面の面積を最小にしたい。直円錐の底面の半径と高さの比を求めよ。

(解) 直円錐の底面の半径と高さをそれぞれ r, h とおくと、母線の長さは $\sqrt{r^2 + h^2}$ 。

また、容積を V 、側面積を S とおくと

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \cdots \textcircled{1}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{より } h = \frac{3V}{\pi r^2} \cdots \textcircled{3}$$

これを $\textcircled{2}$ に代入すると

$$S = \pi r \sqrt{r^2 + \left(\frac{3V}{\pi r^2}\right)^2} = \pi \sqrt{r^4 + \frac{c^2}{r^2}}$$

$$\text{ただし, } c = \frac{3V}{\pi} \cdots \textcircled{4} \quad (\text{※})$$

$r^4 + \frac{c^2}{r^2} = f(r)$ とおき、 $f(r)$ の増減を調べる。

$$f'(r) = 4r^3 - \frac{2c^2}{r^3} = \frac{4}{r^3} \left(r^3 + \frac{c}{\sqrt{2}} \right) \left(r^3 - \frac{c}{\sqrt{2}} \right) = 0 \text{とおくと}$$

$$r > 0 \text{の範囲で, } r = \sqrt[3]{\frac{c}{\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{\frac{3V}{\sqrt{2}\pi}}$$

右の増減表より

$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{\sqrt{2}\pi}}$ のとき、 $f(r)$ は最小となり、 S も最小となる。

このとき

$$r : h = r : \frac{3V}{\pi r^2} = r^3 : \frac{3V}{\pi} = \frac{3V}{\sqrt{2}\pi} : \frac{3V}{\pi} = 1 : \sqrt{2} \cdots (\text{答})$$

(別解) (※) 以下

相加平均 \geq 相乗平均であるから

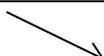
$$r^4 + \frac{c^2}{r^2} = r^4 + \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^2}{2r^2} \geq 3\sqrt[3]{r^4 \times \frac{c^2}{2r^2} \times \frac{c^2}{2r^2}} = 3\sqrt[3]{\frac{c^4}{4}}$$

等号は $r^4 = \frac{c^2}{2r^2}$ のとき。

$r > 0$ より $r^3 = \frac{c^2}{\sqrt{2}}$ のとき。

このとき、

$$r : h = r : \frac{3V}{\pi r^2} = r^3 : \frac{3V}{\pi} = \frac{c^2}{\sqrt{2}} : \frac{3V}{\pi} = \frac{3V}{\sqrt{2}\pi} : \frac{3V}{\pi} = 1 : \sqrt{2} \cdots (\text{答})$$

r	...	$\sqrt[3]{\frac{3V}{\sqrt{2}\pi}}$...
$f'(r)$	-	0	+
$f(r)$		最小	