容積が一定の直円錐の容器を作り，その側面の面積を最小にしたい。直円錐の底面の半径と高さの比を求めよ。

（解）直円錐の底面の半径と高さをそれぞれr, hとおくと，母線の長さは$\sqrt{r^2+h^2}$。

また，容積をV，側面積をSとおくと

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \cdots ①$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\sqrt{r^2+h^2}=\pi r\sqrt{r^2+h^2} \cdots ②$$

①より　$h=\dfrac{3V}{\pi r^2} \cdots ③$

これを②に代入すると

$$S=\pi r\sqrt{r^2+\left(\frac{3V}{\pi r^2}\right)^2}=\pi\sqrt{r^4+\frac{c^2}{r^2}}$$

ただし，$c=\dfrac{3V}{\pi} \cdots ④$　（※）

$r^4+\dfrac{c^2}{r^2}=f(r)$とおき，$f(r)$の増減を調べる。

$f'(r)=4r^3-\dfrac{2c^2}{r^3}=\dfrac{4}{r^3}\left(r^3+\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)\left(r^3-\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)=0$とおくと

$r>0$の範囲で，$r=\sqrt[3]{\dfrac{c}{\sqrt{2}}}=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{\sqrt{2}\pi}}$

右の増減表より

r	$\cdots$	$\sqrt[3]{\dfrac{3V}{\sqrt{2}\pi}}$	$\cdots$
$f'(r)$	$-$	0	$+$
$f(r)$	↘	最小	↗

$r=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{\sqrt{2}\pi}}$のとき，$f(r)$は最小となり，$S$も最小となる。

このとき

$$r:h=r:\frac{3V}{\pi r^2}=r^3:\frac{3V}{\pi}=\frac{3V}{\sqrt{2}\pi}:\frac{3V}{\pi}=1:\sqrt{2} \quad \cdots（答）$$

（別解）（※）以下

相加平均≧相乗平均であるから

$$r^4+\frac{c^2}{r^2}=r^4+\frac{c^2}{2r^2}+\frac{c^2}{2r^2}\geqq 3\sqrt[3]{r^4\times\frac{c^2}{2r^2}\times\frac{c^2}{2r^2}}=3\sqrt[3]{\frac{c^4}{4}}$$

等号は　$r^4=\dfrac{c^2}{2r^2}$のとき。

$r>0$より　$r^3=\dfrac{c^2}{\sqrt{2}}$のとき。

このとき，

$$r:h=r:\frac{3V}{\pi r^2}=r^3:\frac{3V}{\pi}=\frac{c}{\sqrt{2}}:\frac{3V}{\pi}=\frac{3V}{\sqrt{2}\pi}:\frac{3V}{\pi}=1:\sqrt{2} \quad \cdots（答）$$

（2014/5/25　時岡）