

AさんとBさんがコインを n 回ずつ投げるゲームをした。表が出た回数の多い方が勝ち、同じなら引き分けとする。

(1) Aさんが勝つ確率 $P_A(n)$ を求めよ。

(2) 引き分けになる確率を $P(n)$ とおく。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}P(n)$ を求めよ。

(解) Aさんの表が k 回出る確率は、 ${}_nC_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = {}_nC_k \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ($k=0,1,2,\dots,n$) で、Bさんも同様である。

A, Bの表の出る回数が同じとき、引き分けになるからその確率 $P(n)$ は、

$$P(n) = \sum_{k=0}^n \left\{ {}_nC_k \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}^2 = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^n {}_nC_k^2 \cdots \textcircled{1}$$

ここで、二項定理より

$${}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n = (1+x)^n$$

$${}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1} + {}_nC_2x^{n-2} + \cdots + {}_nC_n = (x+1)^n$$

この2式を辺々掛け合わせると

$$({}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n)({}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1} + {}_nC_2x^{n-2} + \cdots + {}_nC_n) = (1+x)^{2n}$$

この式は恒等式であるから、両辺の x^n の係数を比較して

$${}_nC_0^2 + {}_nC_1^2 + {}_nC_2^2 + \cdots + {}_nC_n^2 = {}_{2n}C_n$$

$$\therefore \sum_{k=0}^n {}_nC_k^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

これを①に代入して

$$P(n) = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdots \textcircled{2}$$

従って、Aさんの勝つ確率は

$$P_A(n) = \frac{1}{2} \{1 - P(n)\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right\} = \frac{2^{2n}(n!)^2 - (2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \cdots \text{(答)}$$

(2) ②より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}P(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdots \text{(答) (Wallis の公式)}$$

【証明】拙者のHPにある「こだわり数学 3.Wallisの公式にまつわる話」を参照のこと。

(参考) 十分大きな n に対して, A の勝つ確率 $P_A(n)$ は

$$P_A(n) = \frac{2^{2n}(n!)^2 - (2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \cong \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \right) = P_{A'}(n)$$

n	$P_A(n)$: 分数	$P_A(n)$: 小数	$P_{A'}(n)$: 小数	差 : $P_A(n) - P_{A'}(n)$
1	$\frac{1}{4}$	0.25	0.2179052082	0.03209479177
2	$\frac{5}{16}$	0.3125	0.3005288598	0.0119711402
3	$\frac{11}{32}$	0.34375	0.337132496	0.006617503968
4	$\frac{93}{256}$	0.36328125	0.3589526041	0.004328645887
5	$\frac{193}{512}$	0.376953125	0.3738433739	0.003109751101
6	$\frac{793}{2048}$	0.3872070312	0.3848352835	0.00237174774
7	$\frac{1619}{4096}$	0.3952636719	0.3933781907	0.001885481186
8	$\frac{26333}{65536}$	0.4018096924	0.4002644299	0.001545262483
9	$\frac{53381}{131072}$	0.4072647095	0.4059684027	0.00129630673
10	$\frac{215955}{524288}$	0.411901474	0.4107937942	0.001107679806
10^2		0.4718257605	0.4717905208	0.00003523967276
10^3		0.4910804944	0.4910793794	0.000001115007836
10^4		0.4971790873	0.4971790521	$3.526162857 \times 10^{-8}$
10^5		0.499107939	0.4991079379	$1.115076875 \times 10^{-9}$
10^6		0.4997179052	0.4997179052	$3.526184677 \times 10^{-11}$

(2015/2/14 時岡)