$a<b$ のとき，$f(x)=\dfrac{(x-a)^2(x-b)^2}{x^2}-c^2$ について，方程式 $f(x)=k$ の実数解の個数を求めよ。

（解）$f(x)=\dfrac{\{x^2-(a+b)x+ab\}^2}{x^2}-c^2=\left\{x-(a+b)+\dfrac{ab}{x}\right\}^2-c^2$

$f'(x)=2\left\{x-(a+b)+\dfrac{ab}{x}\right\}\left(1-\dfrac{ab}{x^2}\right)=\dfrac{2(x-a)(x-b)(x^2-ab)}{x^3}=0$ とおくと

$x=a,b,\pm\sqrt{ab}$

$x=0$ は漸近線

$f(\sqrt{ab})=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^4-c^2\cdots$①，$f(-\sqrt{ab})=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4-c^2\cdots$②

増減表をつくると

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\sqrt{ab}$	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$	$\sqrt{ab}$	$\cdots$	b	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	↓	②	↑	∞	↓	$-c^2$	↑	①	↓	$-c^2$	↑	∞

グラフから，$y=f(x)$ と $y=k$ の共有点の個数を k の値で分類すると

$k<-c^2$ のとき，0 個

$k=-c^2$ のとき，2 個

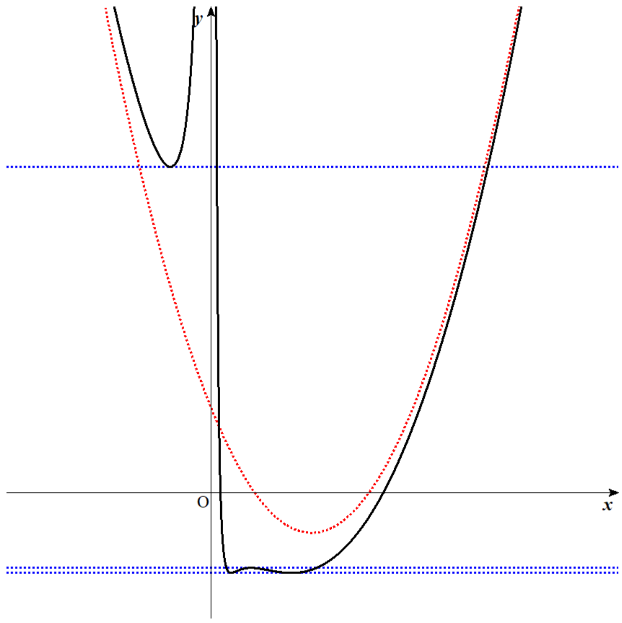
$-c^2<k<(\sqrt{a}-\sqrt{b})^4-c^2$ のとき，4 個

$k=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^4-c^2$ のとき，3 個

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^4-c^2<k<(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4-c^2$ のとき，2 個

$k=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4-c^2$ のとき，3 個

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4-c^2<k$ のとき，4 個



よって，実数解の個数で分類すると

$$\begin{cases}\text{0個}: k<-c^2 & \textbf{のとき}\\ \text{2個}: k=-c^2,\ (\sqrt{a}-\sqrt{b})^4-c^2<k<(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4-c^2 & \textbf{のとき}\\ \text{3個}: k=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^4-c^2,\ k=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4-c^2 & \textbf{のとき}\\ \text{4個}: -c^2<k<(\sqrt{a}-\sqrt{b})^4-c^2,\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^4-c^2<k & \textbf{のとき}\end{cases}$$

（2018/6/10　時岡）