C62

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[m]{x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m}-\sqrt[n]{x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n}\right)$$

（解）∞－∞の不定形であるから，分母，分子を x で割り変形すると

$$与式＝\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_m}{x^m}\right)^{\frac{1}{m}}-\left(1+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\cdots+\frac{b_n}{x^n}\right)^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{x}}$$

$\frac{0}{0}$ の不定形であるから，ロピタルの定理を適用して分母，分子を x で微分すると

$$与式＝\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{m}\left(1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_m}{x^m}\right)^{\frac{1}{m}-1}\left(-\frac{a_1}{x^2}-\frac{2a_2}{x^3}-\cdots-\frac{ma_m}{x^{m+1}}\right)-\frac{1}{n}\left(1+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\cdots+\frac{b_n}{x^n}\right)^{\frac{1}{n}-1}\left(-\frac{b_1}{x^2}-\frac{2b_2}{x^3}-\cdots-\frac{nb_n}{x^{n+1}}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

分母，分子に $-x^2$ をかけると

$$与式＝\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{m}\left(1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_m}{x^m}\right)^{\frac{1}{m}-1}\left(a_1+\frac{2a_2}{x}+\cdots+\frac{ma_m}{x^{m-1}}\right)-\frac{1}{n}\left(1+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\cdots+\frac{b_n}{x^n}\right)^{\frac{1}{n}-1}\left(b_1+\frac{2b_2}{x}+\cdots+\frac{nb_n}{x^{n-1}}\right)\right\}$$

$$＝\frac{a_1}{m}-\frac{b_1}{n}\quad\cdots（答）$$

（2018/9/12　時岡）