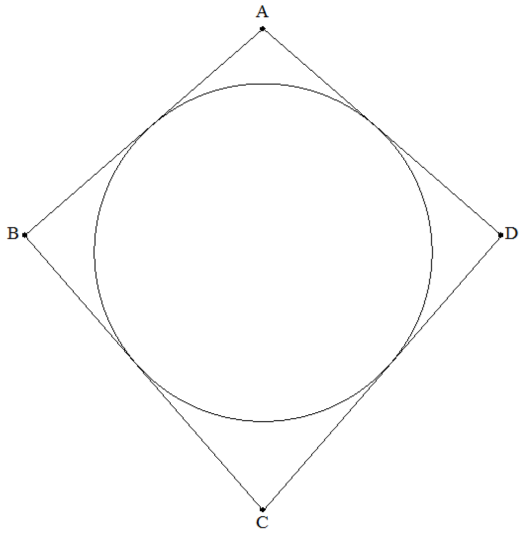
C63

AB＝AD＝a，CB＝CD＝b（$0<a<b$）である凧形四角形 ABCD について，BD＝x のときの内接円の半径を $r(x)$ とおく。

(1) $r(x)$を求めよ。

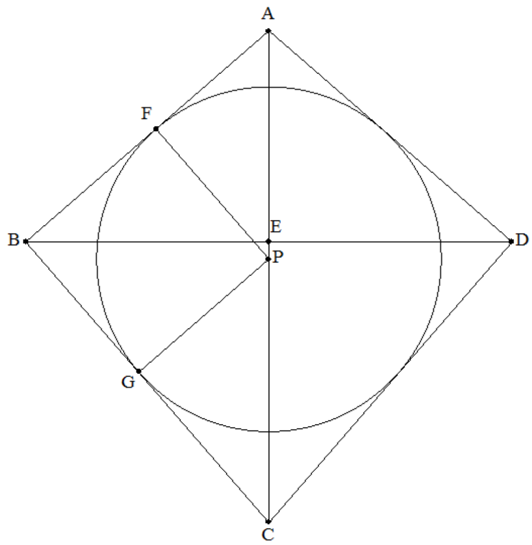
(2) $r(x)$の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(3) (1)で求めた式で， $r(0), r(2a)$ の値を定義する。 x が 0 から $2a$ まで変化するときの $r(x)$ の平均値を求めよ。



（解）

対角線の交点を E，内接円の中心 P から AB，BC に垂線 PF，PG を引く。



(1) △ABE について，BE=$\dfrac{x}{2}$ であるから三平方の定理により

AE＝$\sqrt{a^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$　同様に△CBE について，CE＝$\sqrt{b^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$

よって，AC＝AE＋CE＝$\sqrt{a^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}+\sqrt{b^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$

次に，△PAB＋△PBC＝△BCA であるから，

$\dfrac{1}{2}ar(x)+\dfrac{1}{2}br(x)=\dfrac{1}{2}\left\{\sqrt{a^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}+\sqrt{b^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\right\}\cdot\dfrac{x}{2}$ より

$$r(x)=\frac{x}{2(a+b)}\left\{\sqrt{a^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}+\sqrt{b^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right\}=\frac{x\left(\sqrt{4a^2-x^2}+\sqrt{4b^2-x^2}\right)}{4(a+b)}\cdots\text{（答）}$$

(2) $r(x)=\dfrac{x\left(\sqrt{4a^2-x^2}+\sqrt{4b^2-x^2}\right)}{4(a+b)}$ より

$$r'(x)=\frac{\left(\sqrt{4a^2-x^2}+\sqrt{4b^2-x^2}\right)+x\left(\dfrac{-2x}{2\sqrt{4a^2-x^2}}+\dfrac{-2x}{2\sqrt{4b^2-x^2}}\right)}{4(a+b)}=\frac{\left(2b^2-x^2\right)\sqrt{4a^2-x^2}+\left(2a^2-x^2\right)\sqrt{4b^2-x^2}}{4(a+b)\sqrt{4a^2-x^2}\sqrt{4b^2-x^2}}$$

$$=\frac{\left(2b^2-x^2\right)^2\left(4a^2-x^2\right)-\left(2a^2-x^2\right)^2\left(4b^2-x^2\right)}{4(a+b)\sqrt{4a^2-x^2}\sqrt{4b^2-x^2}\left\{\left(2b^2-x^2\right)\sqrt{4a^2-x^2}-\left(2a^2-x^2\right)\sqrt{4b^2-x^2}\right\}}$$

$$=\frac{4(a+b)(a-b)\left\{\left(a^2+b^2\right)x^2-4a^2b^2\right\}}{4(a+b)\sqrt{4a^2-x^2}\sqrt{4b^2-x^2}\left\{\left(2b^2-x^2\right)\sqrt{4a^2-x^2}-\left(2a^2-x^2\right)\sqrt{4b^2-x^2}\right\}}$$

$$=\frac{(a-b)(a^2+b^2)\left(x+\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\left(x-\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{4a^2-x^2}\sqrt{4b^2-x^2}\left\{(2b^2-x^2)\sqrt{4a^2-x^2}-(2a^2-x^2)\sqrt{4b^2-x^2}\right\}}=0$$ とおくと　$x=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$x<\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ のとき，$r(x)>0$，$x>\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ のとき，$r(x)<0$ であるから，$x=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ のとき，極大かつ最大となる。最大値は，$r\left(\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\frac{ab}{a+b}$ …（答）

なお，このとき，余弦定理により，

$$\cos\angle BAD=\frac{2a^2-\left(\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2}{2a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},\quad \cos\angle BCD=\frac{2b^2-\left(\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2}{2b^2}=-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$ より

$$\cos\angle BAD+\cos\angle BCD=0,\quad 2\cos\frac{\angle BAD+\angle BCD}{2}\cos\frac{\angle BAD-\angle BCD}{2}=0$$

∠BAD＋∠BCD＝180°　となるから，四角形 ABCD は円に内接する。

従って，**凧形四角形は，円に内接するときその内接円の半径は最大となる。**

(3)　求める平均を m とおくと，$m=\frac{1}{2a}\int_0^{2a}r(x)dx$ である。

$$m=\frac{1}{2a}\int_0^{2a}\frac{x\left(\sqrt{4a^2-x^2}+\sqrt{4b^2-x^2}\right)}{4(a+b)}dx=\frac{1}{8a(a+b)}\int_0^{2a}\left(x\sqrt{4a^2-x^2}+x\sqrt{4b^2-x^2}\right)dx$$

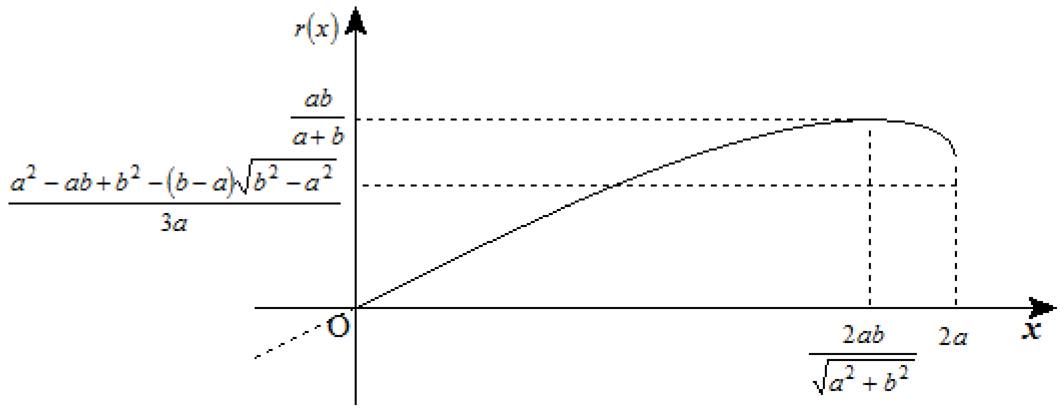
$$\left(\begin{array}{l}\text{ここで，}\left\{(4a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right\}'=\frac{3}{2}(4a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(4a^2-x^2)'=\frac{3}{2}(4a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=-3x\sqrt{4a^2-x^2}\text{ であるから}\\ \int x\sqrt{4a^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}(4a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+C\quad(C\text{は積分定数})\qquad\text{同様に，}\int x\sqrt{4b^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}(4b^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+C\end{array}\right)$$

よって，$m=\frac{1}{8a(a+b)}\left[-\frac{1}{3}(4a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(4b^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2a}=\frac{1}{8a(a+b)}\left[-\frac{1}{3}(4b^2-4a^2)^{\frac{3}{2}}-\left\{-\frac{1}{3}(4a^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(4b^2)^{\frac{3}{2}}\right\}\right]$

$$=\frac{1}{8a(a+b)}\left[-\frac{8}{3}(b^2-a^2)\sqrt{b^2-a^2}+\frac{8}{3}(a^3+b^3)\right]=\frac{1}{8a(a+b)}\left[-\frac{8}{3}(b+a)(b-a)\sqrt{b^2-a^2}+\frac{8}{3}(a+b)(a^2-ab+b^2)\right]$$

$$=\frac{1}{3a}\left[-(b-a)\sqrt{b^2-a^2}+a^2-ab+b^2\right]=\frac{a^2-ab+b^2-(b-a)\sqrt{b^2-a^2}}{3a}$$ …（答）

（補足）



（2018/10/13　時岡）