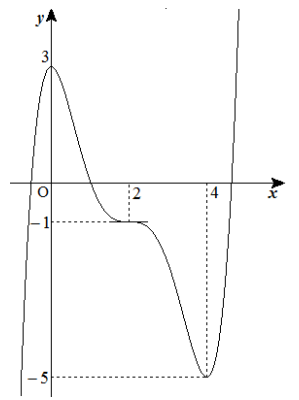


n 次関数 $y = f(x)$ は、 $x=0$ で極大値 3、 $x=4$ で極小値 -5 をとり、点 $(2, -1)$ は変曲点で、 $x=2$ における接線の傾きは 0 である。このような $y = f(x)$ を一つ示せ。



(解) 極値が変曲点で対称になっているから、 $y = f(x)$ を x 軸方向に -2 、 y 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフを考える (右図)。

このとき、 $x=-2$ で極大値 4、 $x=2$ で極小値 -4 をとることになる。

原点が変曲点なので、 x^{2n+1} を因数にもつ ($n=1, 2, \dots$)。

奇関数であるから、 x^{2n+1} 以外の式は偶関数である。

$$f(x) = ax^{2n+1}(x+b)(x-b) = a(x^{2n+3} - b^2x^{2n+1}) \quad \dots \textcircled{1} \text{ とおける。 } (a > 0, b > 0)$$

$$f'(x) = a\{(2n+3)x^{2n+2} - b^2(2n+1)x^{2n}\} = a(2n+3)x^{2n}\left(x^2 - \frac{2n+1}{2n+3}b^2\right)$$

$$x=2 \text{ で極値をもつから、 } f'(2)=0 \text{ より } 2^2 - \frac{2n+1}{2n+3}b^2 = 0 \quad \therefore b^2 = \frac{4(2n+3)}{2n+1}$$

$$\text{これを} \textcircled{1} \text{ に代入すると } f(x) = a\left\{x^{2n+3} - \frac{4(2n+3)}{2n+1}x^{2n+1}\right\} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{点 } (2, -4) \text{ を通るから } -4 = a\left\{2^{2n+3} - \frac{4(2n+3)}{2n+1} \cdot 2^{2n+1}\right\} \quad \therefore a = \frac{2n+1}{2^{2n+2}}$$

$$\text{これを} \textcircled{2} \text{ に代入すると、 } f(x) = \frac{2n+1}{2^{2n+2}}\left\{x^{2n+3} - \frac{4(2n+3)}{2n+1}x^{2n+1}\right\} = \frac{1}{2^{2n+2}}\{(2n+1)x^{2n+3} - 4(2n+3)x^{2n+1}\}$$

最後に、これを x 軸方向に 2 、 y 軸方向に -1 だけ平行移動して

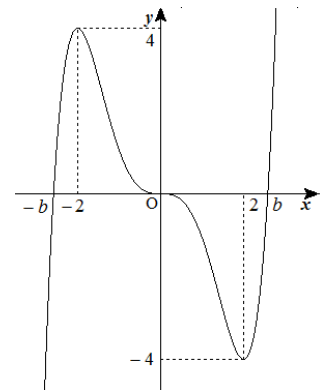
$$y - (-1) = \frac{1}{2^{2n+2}}\{(2n+1)(x-2)^{2n+3} - 4(2n+3)(x-2)^{2n+1}\}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2^{2n+2}}\{(2n+1)(x-2)^{2n+3} - 4(2n+3)(x-2)^{2n+1}\} - 1$$

具体例として、

$$n=1 \text{ のとき、 } y = \frac{1}{16}\{3(x-2)^5 - 20(x-2)^3\} - 1 \quad \dots \text{ (答) }$$

$$n=2 \text{ のときは、 } y = \frac{1}{64}\{5(x-2)^7 - 28(x-2)^5\} - 1$$



(2019/2/6 時岡)