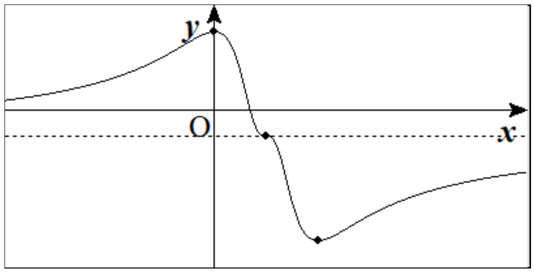
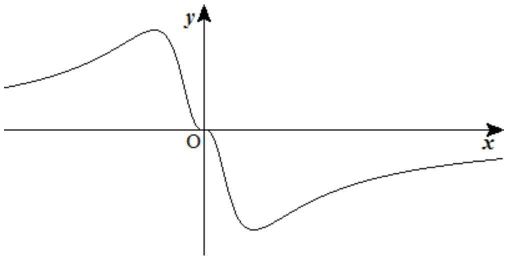
C65

分数関数 $y=f(x)$ は，$x=0$ で極大値 3，$x=4$ で極小値 -5 をとり，点 $(2,-1)$ は変曲点で，$x=2$ における接線の傾きは 0 である。また，$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=-1$ である。このような $y=f(x)$ を一つ示せ。



（解）極値が変曲点で対称になっているから，$y=f(x)$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフを考える（右図）。



このとき，$x=-2$ で極大値 4，$x=2$ で極小値 -4 をとることになる。
原点が変曲点なので，x^3 の因数をもつ。
奇関数であるから，x^3 以外の式は偶関数である。
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ より，分子は分母より次数は低い。
$x>0$ のとき，$y<0$ である。

$f(x)=\dfrac{ax^3(x^2+b)}{(x^2+1)^3}$ ・・・①とおいてみる。（$a<0, b>0$）

分母は $(x^2+2)^3$ としてもよいが，一つ求めればいいので，①で考える。

$f(x)=a(x^5+bx^3)(x^2+1)^{-3}$ より

$$f'(x)=a\left\{(5x^4+3bx^2)(x^2+1)^{-3}+(x^5+bx^3)\cdot(-3)(x^2+1)^{-4}\cdot 2x\right\}=-\frac{ax^2\{x^4+(3b-5)x^2-3b\}}{(x^2+1)^4}$$

$x=2$ で極値をもつから，$f'(2)=0$ より　$2^4+(3b-5)\cdot 2^2-3b=0$　$\therefore b=\dfrac{4}{9}$

これを①に代入すると　$y=\dfrac{ax^3\left(x^2+\dfrac{4}{9}\right)}{(x^2+1)^3}=\dfrac{ax^3(9x^2+4)}{9(x^2+1)^3}$　・・・②

点 $(2,-4)$ を通るから　$-4=\dfrac{a\cdot 2^3(9\cdot 2^2+4)}{9(2^2+1)^3}$　$\therefore a=-\dfrac{225}{16}$

これを②に代入すると，$y=-\dfrac{225}{16}\cdot\dfrac{x^3(9x^2+4)}{9(x^2+1)^3}=-\dfrac{25x^3(9x^2+4)}{16(x^2+1)^3}$

最後に，これを x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動して　$y-(-1)=-\dfrac{25(x-2)^3\{9(x-2)^2+4\}}{16\{(x-2)^2+1\}^3}$

$$\therefore y=-\frac{25(x-2)^3\{9(x-2)^2+4\}}{16\{(x-2)^2+1\}^3}-1=-\frac{25(x-2)^3(9x^2-36x+40)}{16(x^2-4x+5)^3}-1$$ ・・・（答）

（2019/2/7　時岡）