C68

4 次方程式 $x^4+ax+b=0$ $(ab\fallingdotseq 0)$ の 4 つの解の n 乗の和を a_n とおくとき，次の比例式を証明せよ。

$a_3a_{10}:a_4a_9:a_6a_7:a_{13}=30:12:21:13$

証明　$f(x)=x^4+ax+b$ とおくと，$\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=\dfrac{4x^4+ax}{x^4+ax+b}$ である。実際に割り算をすると，

$$
\begin{array}{l}
\quad ⓪\ ①\ ②\ ③\ ④\ ⑤\ ⑥\ ⑦\ ⑧\ ⑨\ ⑩\ ⑪\ ⑫\ ⑬ \\
\quad 4,\ 0,\ 0,\ -3a,\ -4b,\ 0,\ 3a^2,\ 7ab,\ 4b^2,\ -3a^3,\ -10a^2b,\ -11ab^2,\ 3a^4-4b^3,\ 13a^3b \\
1,\ 0,\ 0,\ a,\ b\,\big)\ 4,\ 0,\ 0,\ a,\ 0 \\
\quad 4,\ 0,\ 0,\ 4a,\ 4b \\
\hline
\quad -3a,\ -4b \\
\quad -3a,\ 0,\ 0,\ -3a^2,\ -3b^2 \\
\hline
\quad -4b,\ 0,\ 3a^2,\ 3ab \\
\quad -4b,\ 0,\ 0,\ -4ab,\ -4b^2 \\
\hline
\quad 3a^2,\ 7ab,\ 4b^2 \\
\quad 3a^2,\ 0,\ 0,\ 3a^3,\ 3a^2b \\
\hline
\quad 7ab,\ 4b^2,\ -3a^3,\ -3a^2b \\
\quad 7ab,\ 0,\ 0,\ 7a^2b,\ 7ab^2 \\
\hline
\quad 4b^2,\ -3a^3,\ -10a^2b,\ -7ab^2 \\
\quad 4b^2,\ 0,\ 0,\ 4ab^2,\ 4b^3 \\
\hline
\quad -3a^3,\ -10a^2b,\ -11ab^2,\ -4b^3 \\
\quad -3a^3,\ 0,\ 0,\ -3a^4,\ -3a^3b \\
\hline
\quad -10a^2b,\ -11ab^2,\ 3a^4-4b^3,\ 3a^3b \\
\quad -10a^2b,\ 0,\ 0,\ -10a^3b,\ -10a^2b^2 \\
\hline
\quad -11ab^2,\ 3a^4-4b^3,\ 13a^3b,\ 10a^2b^2 \\
\quad -11ab^2,\ 0,\ 0,\ -11a^2b^2,\ -11ab^3 \\
\hline
\quad 3a^4-4b^3,\ 13a^3b,\ 21a^2b^2,\ 11ab^3 \\
\quad 3a^4-4b^3,\ 0,\ 0,\ 3a^5-4ab^3,\ 3a^4b-4b^4 \\
\hline
\quad 13a^3b,\ 21a^2b^2,\ -3a^5+15ab^3,\ -3a^4b+4b^4 \\
\quad 13a^3b,\ 0,\ 0,\ 13a^4b,\ 13a^3b^2 \\
\hline
\quad 21a^2b^2,\ -3a^5+15ab^3,\ -16a^4b+4b^4,\ -13a^3b^2
\end{array}
$$

この計算により，

$a_3=-3a$ ，$a_4=-4b$ ，$a_6=3a^2$ ，$a_7=7ab$ ，$a_9=-3a^3$ ，$a_{10}=-10a^2b$ ，$a_{13}=13a^3b$ であるから，

$a_3a_{10}:a_4a_9:a_6a_7:a_{13}=-3a(-10a^2b):(-4b)(-3a^3):3a^2\cdot 7ab:13a^3b=30:12:21:13$ 終

補足　$\dfrac{xf'(x)}{f(x)}$ で解の k 乗の和が求められる証明は，こだわり数学11. n 次方程式の n 個の k 乗の和について（3.導関数の利用）を参照のこと。

(2019/12/16　時岡)

別解

4次方程式 $x^4+ax+b=0$ $(ab\fallingdotseq 0)$ の4つの解を α, β, γ, δ とおく。

$\alpha^4+a\alpha+b=0$ より，両辺に α^n を掛けると，$\alpha^{n+4}+a\alpha^{n+1}+b\alpha^n=0$

同様に，$\beta^{n+4}+a\beta^{n+1}+b\beta^n=0$，$\gamma^{n+4}+a\gamma^{n+1}+b\gamma^n=0$，$\delta^{n+4}+a\delta^{n+1}+b\delta^n=0$

これら4式を辺々加えると，$a_{n+4}+aa_{n+1}+ba_n=0$ $\quad\therefore a_{n+4}=-aa_{n+1}-ba_n$ $\quad\cdots$①

解と係数の関係により，

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$，$\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=0$，$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-a$，$\alpha\beta\gamma\delta=b$ であるから，

$a_{-1}=\alpha^{-1}+\beta^{-1}+\gamma^{-1}+\delta^{-1}=\dfrac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma\delta}=\dfrac{-a}{b}=-\dfrac{a}{b}$，

$a_0=4$，$a_1=0$，$a_2=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)=0$ である。

漸化式①より，

$a_3=-aa_0-ba_{-1}=-a\cdot4-b\left(-\dfrac{a}{b}\right)=-3a$

$a_4=-aa_1-ba_0=-a\cdot0-b\cdot4=-4b$

$a_5=-aa_2-ba_1=-a\cdot0-b\cdot0=0$

$a_6=-aa_3-ba_2=-a\cdot(-3a)-b\cdot0=3a^2$

$a_7=-aa_4-ba_3=-a(-4b)-b(-3a)=7ab$

$a_8=-aa_5-ba_4=-a\cdot0-b(-4b)=4b^2$

$a_9=-aa_6-ba_5=-a\cdot3a^2-b\cdot0=-3a^3$

$a_{10}=-aa_7-ba_6=-a\cdot7ab-b\cdot3a^2=-10a^2b$

$a_{11}=-aa_8-ba_7=-a\cdot4b^2-b\cdot7ab=-11ab^2$

$a_{12}=-aa_9-ba_8=-a(-3a^3)-b\cdot4b^2=3a^4-4b^3$

$a_{13}=-aa_{10}-ba_9=-a(-10a^2b)-b(-3a^3)=13a^3b$

よって，$a_3a_{10}:a_4a_9:a_6a_7:a_{13}=-3a(-10a^2b):(-4b)(-3a^3):3a^2\cdot7ab:13a^3b=30:12:21:13$ 終

(2019/12/18　時岡)