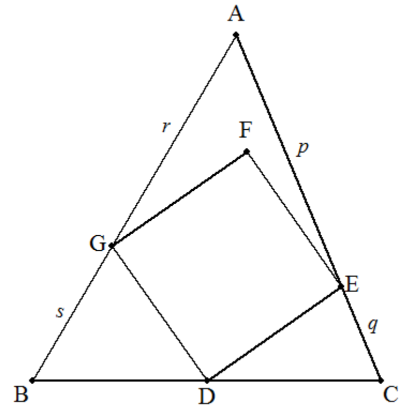
△ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ内接正方形問題

△ABC について，BC の中点を D とし，CA 上に点 E を，△ABC 内に点 F を，AB 上に点 G を，四角形 DEFG が正方形になるようにとる。AE＝ p ，EC＝ q ，AG＝ r ，GB＝ s とおくとき，次を証明せよ。



(1)　$p^2+q^2=r^2+s^2$

(2)　（正方形の 1 辺）$\dfrac{ps+qr}{\sqrt{2\left(p^2+q^2\right)}}$

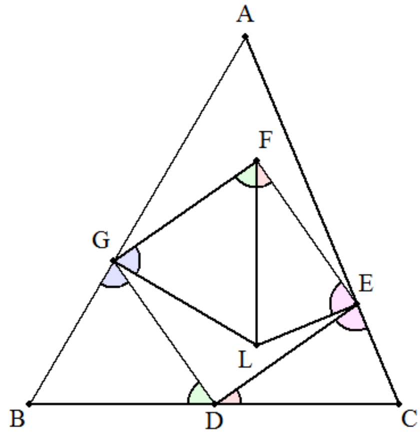
(3)　BC＝$\sqrt{\dfrac{2\left\{(p+q)^2s^2+(r+s)^2q^2\right\}}{p^2+q^2}}$

(4)　$\cos A=\dfrac{rs-pq}{ps-qr}$

（解）

(1) △ABC 内に点 L を，GB＝GL，GB⊥GL となるようにとると，△GBD≡△GLF（2 辺夾角相等）であるから，

BD＝LF･･･①，∠BDG＝∠LFG･･･②　である。



また，△AGL は直角三角形となるから，

r^2+s^2 ＝AG²＋GL²＝AL²･･･③　である。

次に，△DCE と△FLE について

DC＝DB＝FL（①より）･･･④

DE＝FE（仮定より）･･･⑤

∠EDC＝180°－（∠BDG＋90°）＝90°－∠BDG

＝∠EFG－∠LFG＝∠EFL･･･⑥

④～⑥より，2 辺夾角相等より，△DCE≡△FLE であるから

EC＝EL･･･⑦

∠CEL＝∠CED＋∠DEL＝∠LEF＋∠DEL＝90°より

△AEL は直角三角形となるから，

p^2+q^2 ＝AE²＋EL²＝AL²･･･⑧

③，⑧より，$p^2+q^2=r^2+s^2$（終証）

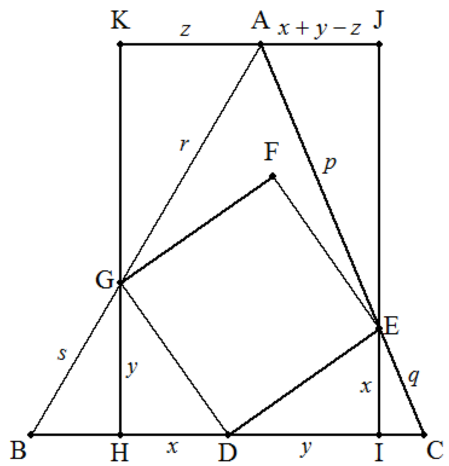
(2)　正方形の 1 辺を x とおくと，EG＝ $\sqrt{2}x$ である。

また，AE＝ p ，EC＝EL＝ q ，AG＝ r ，GB＝GL＝ s ，AL＝ $\sqrt{p^2+q^2}$ である。

(1)で，四角形 AGLE は円に内接するから，トレミーの定理より，EG・AL＝AE・GL＋EL・AG が成り立つ。

$\sqrt{2}x\sqrt{p^2+q^2}=ps+qr$　∴　正方形の 1 辺は，$x=\dfrac{ps+qr}{\sqrt{2\left(p^2+q^2\right)}}$　■

(2)別解　図のように，BC と辺を共有し，E，A，G を通る長方形 HIJK をつくり，HD＝ x ，DI＝ y とおくと，



△GHD≡△DIE より，GH＝ y ，EI＝ x である。

△GBH∽△GAK，△ECI∽△EAJ より

KH＝$\dfrac{r+s}{s}y$，JI＝$\dfrac{p+q}{q}x$ で，KH＝JI より　$\dfrac{r+s}{s}y=\dfrac{p+q}{q}x$

$x:y=\dfrac{r+s}{s}:\dfrac{p+q}{q}=q(r+s):s(p+q)$

$x=q(r+s)k,\ y=s(p+q)k$ ･･･⑨とおける。ただし，$k>0$。

次に，KA＝ z とおくと，AJ＝ $x+y-z$

BH：AK＝ s ： r より

BH＝$\dfrac{s}{r}$AK＝$\dfrac{s}{r}z$・・・⑩

同様に，CI：AJ＝q ： p より CI＝$\dfrac{q}{p}$AK＝$\dfrac{q}{p}(x+y-z)$・・・⑪

BD＝DC であるから，BH＋HD＝DI＋IC

⑩，⑪より

$$\frac{s}{r}z+x=y+\frac{q}{p}(x+y-z)$$

$$z=\frac{\left(\frac{q}{p}-1\right)x+\left(\frac{q}{p}+1\right)y}{\frac{s}{r}+\frac{q}{p}}=\frac{r\{(q-p)x+(q+p)y\}}{ps+qr}$$

⑨より

$$z=\frac{r\{(q-p)\times q(r+s)k+(q+p)\times s(p+q)k\}}{ps+qr}=\frac{r\left\{q(q-p)(r+s)+s(p+q)^2\right\}}{ps+qr}k$$

⑩より，BH＝$\dfrac{s\left\{q(q-p)(r+s)+s(p+q)^2\right\}}{ps+qr}k$

△GBH は直角三角形であるから，$\mathrm{BH}^2+\mathrm{GH}^2=\mathrm{GB}^2$

$$\left[\frac{s\left\{q(q-p)(r+s)+s(p+q)^2\right\}}{ps+qr}k\right]^2+\{s(p+q)k\}^2=s^2$$

$$k^2=\frac{s^2}{\left[\frac{s\left\{q(q-p)(r+s)+s(p+q)^2\right\}}{ps+qr}\right]^2+\{s(p+q)\}^2}=\frac{(ps+qr)^2}{\left\{q(q-p)(r+s)+s(p+q)^2\right\}^2+\{(p+q)(ps+qr)\}^2}$$

$$=\frac{(ps+qr)^2}{2(p^2+q^2)(q^2r^2+2q^2rs+p^2s^2+2pqs^2+2q^2s^2)}=\frac{(ps+qr)^2}{2(p^2+q^2)\left\{q^2(r+s)^2+s^2(p+q)^2\right\}}\cdots⑫$$

また，△GDH は直角三角形であるから，⑫より

$\mathrm{GD}^2=\mathrm{DH}^2+\mathrm{GH}^2=x^2+y^2=\{q(r+s)k\}^2+\{s(p+q)k\}^2=\left\{q^2(r+s)^2+s^2(p+q)^2\right\}k^2=\dfrac{(ps+qr)^2}{2(p^2+q^2)}$

GD＞0 であるから正方形の 1 辺は

GD＝$\dfrac{ps+qr}{\sqrt{2(p^2+q^2)}}$ ■

(3) BC＝2（BH＋HD）$=2\left[\dfrac{s\left\{q(q-p)(r+s)+s(p+q)^2\right\}}{ps+qr}k+q(r+s)k\right]$

$$=\frac{2\left[s\left\{q(q-p)(r+s)+s(p+q)^2\right\}+q(ps+qr)(r+s)\right]}{ps+qr}k=\frac{2(q^2r^2+2q^2rs+p^2s^2+2pqs^2+2q^2s^2)}{ps+qr}k$$

$$=\frac{2\left\{q^2(r+s)^2+s^2(p+q)^2\right\}}{ps+qr}\times\frac{ps+qr}{\sqrt{2(p^2+q^2)\left\{q^2(r+s)^2+s^2(p+q)^2\right\}}}=\sqrt{\frac{2\left\{(p+q)^2s^2+(r+s)^2q^2\right\}}{p^2+q^2}}$$ ■

(2)別解 2　△ABC＝S，凹型四角形 AGFE＝S_1，△BDG＝S_2，△CED＝S_3 とおく。

また，正方形の 1 辺を x とおくと，正方形 DEFG＝x^2 となるから，$S_1+S_2+S_3=S-x^2$

(1)より，$S_1+S_2+S_3$＝四角形 AGLE＝$\dfrac{1}{2}(pq+rs)$・・・⑬

ここで，$S_2 = \frac{1}{2}S \times \frac{s}{r+s} = \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{r+s}S$，$S_3 = \frac{1}{2}S \times \frac{q}{p+q} = \frac{1}{2}\cdot\frac{q}{p+q}S$，

$\triangle AGE = S \times \frac{r}{r+s} \times \frac{p}{p+q} = \frac{pr}{(p+q)(r+s)}S$ であるから

$S-(S_2+S_3+\triangle AGE)=\triangle DEG=\frac{1}{2}x^2$ より，

$$x^2 = 2S-2(S_2+S_3+\triangle AGE) = 2S-2\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{r+s}S+\frac{1}{2}\cdot\frac{q}{p+q}S+\frac{pr}{(p+q)(r+s)}S\right\}$$

$$=\left\{2-\frac{s}{r+s}-\frac{q}{p+q}-\frac{2pr}{(p+q)(r+s)}\right\}S=\frac{ps+qr}{(p+q)(r+s)}S \cdots ⑭$$

$$S_1+S_2+S_3=S-x^2=S-\left\{2-\frac{s}{r+s}-\frac{q}{p+q}-\frac{2pr}{(p+q)(r+s)}\right\}S$$

$$=\left\{\frac{s}{r+s}+\frac{q}{p+q}+\frac{2pr}{(p+q)(r+s)}-1\right\}S=\frac{1}{2}(pq+rs)$$ より（∵⑬より）

$$S=\frac{\frac{1}{2}(pq+rs)}{\frac{s}{r+s}+\frac{q}{p+q}+\frac{2pr}{(p+q)(r+s)}-1}=\frac{(p+q)(r+s)(pq+rs)}{2(pr+qs)}$$

これを⑭に代入すると

$$x^2=\frac{ps+qr}{(p+q)(r+s)}\times\frac{(p+q)(r+s)(pq+rs)}{2(pr+qs)}=\frac{(pq+rs)(ps+qr)}{2(pr+qs)}$$

ここで

$$\frac{(pq+rs)(ps+qr)}{2(pr+qs)}-\frac{(ps+qr)^2}{2(p^2+q^2)}=\frac{(ps+qr)\{(pq+rs)(p^2+q^2)-(ps+qr)(pr+qs)\}}{2(pr+qs)(p^2+q^2)}$$

$$=\frac{(ps+qr)\{p^3q+pq^3+p^2rs+q^2rs-(p^2rs+pqs^2+pqr^2+q^2rs)\}}{2(pr+qs)(p^2+q^2)}$$

$$=\frac{pq(ps+qr)(p^2+q^2-r^2-s^2)}{2(pr+qs)(p^2+q^2)}=0 \quad (\because (1)\text{より})$$

$$\therefore x^2=\frac{(pq+rs)(ps+qr)}{2(pr+qs)}=\frac{(ps+qr)^2}{2(p^2+q^2)}$$

$x>0$ より　$x=\frac{ps+qr}{\sqrt{2(p^2+q^2)}}$　■

(1)別解２　正方形の１辺を x，BC＝a とおくと，GE＝$\sqrt{2}x$，BD＝DC＝$\frac{a}{2}$ である。

△AGE と△ABC において∠A が共通であるから，

$$\cos A=\frac{p^2+r^2-(\sqrt{2}x)^2}{2pr}=\frac{(p+q)^2+(r+s)^2-a^2}{2(p+q)(r+s)}$$ より

$$(p+q)(r+s)(p^2+r^2-2x^2)-pr\{(p+q)^2+(r+s)^2-a^2\}=0 \cdots ⑮$$

△GBD と△ABC において∠B が共通であるから，

$$\cos B=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+s^2-x^2}{2\cdot\frac{a}{2}s}=\frac{a^2+(r+s)^2-(p+q)^2}{2a(r+s)}$$ より

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+s^2-x^2=\frac{s}{2(r+s)}\{a^2+(r+s)^2-(p+q)^2\}\cdots ⑯$$

△EDC と△ABC において∠C が共通であるから，

$$\cos C=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+q^2-x^2}{2\cdot\frac{a}{2}q}=\frac{a^2+(p+q)^2-(r+s)^2}{2a(p+q)}$$ より

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+q^2-x^2=\frac{q}{2(p+q)}\left\{a^2+(p+q)^2-(r+s)^2\right\}\cdots⑰$$

⑯，⑰は x^2 ， a^2 についての連立２元１次方程式である。

⑯－⑰から x^2 を消去し， a^2 について解く。

$$s^2-q^2=\left\{\frac{s}{2(r+s)}-\frac{q}{2(p+q)}\right\}a^2-\left\{\frac{s}{2(r+s)}+\frac{q}{2(p+q)}\right\}\left\{(p+q)^2-(r+s)^2\right\}$$

$$(ps-qr)a^2=\{s(p+q)+q(r+s)\}\left\{(p+q)^2-(r+s)^2\right\}+2(p+q)(r+s)\left(s^2-q^2\right)\cdots⑱$$

[1]　$ps-qr=0$ のとき

$p:q=r:s$ より GE // BC となるから， $p=r,q=s$ より， $p^2+q^2=r^2+s^2$ は成り立つ。

[2]　$ps-qr\neq 0$ のとき，④から

$$a^2=\frac{p^3s+ps^3+p^2qr+4p^2qs+3pq^2s-q^3r-qr^3-pr^2s-4qr^2s-3qrs^2}{ps-qr}\cdots⑲$$

⑲を⑰に代入して， x^2 について解くと

$$x^2=\frac{p^3s+ps^3+p^2qr+qrs^2-q^3r-qr^3-pq^2s-pr^2s}{4(ps-qr)}\cdots⑳$$

⑲，⑳を⑮の左辺に代入すると，

$$(p+q)(r+s)\left\{p^2+r^2-2\times\frac{p^3s+ps^3+p^2qr+qrs^2-q^3r-qr^3-pq^2s-pr^2s}{4(ps-qr)}\right\}$$

$$-pr\left\{(p+q)^2+(r+s)^2-\frac{p^3s+ps^3+p^2qr+4p^2qs+3pq^2s-q^3r-qr^3-pr^2s-4qr^2s-3qrs^2}{ps-qr}\right\}$$

$$=\frac{(p+q)(r+s)(ps+qr)\left(p^2+q^2-r^2-s^2\right)}{2(ps-qr)}\quad(\text{計算省略})$$

よって， $\frac{(p+q)(r+s)(ps+qr)\left(p^2+q^2-r^2-s^2\right)}{2(ps-qr)}=0$ より

$p^2+q^2-r^2-s^2=0\quad\therefore p^2+q^2=r^2+s^2$

以上[1]，[2]より $p^2+q^2=r^2+s^2$ が成立する。■

⑵別解３　⑳の分子を s について整理すると

$$x^2=\frac{ps^3+qrs^2+p\left(p^2-q^2-r^2\right)s+qr\left(p^2-q^2-r^2\right)}{4(ps-qr)}=\frac{s^2(ps+qr)+(ps+qr)\left(p^2-q^2-r^2\right)}{4(ps-qr)}$$

$$=\frac{(ps+qr)\left(p^2-q^2-r^2+s^2\right)}{4(ps-qr)}=\frac{(ps+qr)\left(p^2-q^2-r^2+p^2+q^2-r^2\right)}{4(ps-qr)}=\frac{(ps+qr)\left(2p^2-2r^2\right)}{4(ps-qr)}$$

$$=\frac{(ps+qr)\left(p^2-r^2\right)}{2(ps-qr)}\cdots(21)$$

$$=\frac{(ps+qr)^2\left(p^2-r^2\right)}{2(ps-qr)(ps+qr)}=\frac{(ps+qr)^2\left(p^2-r^2\right)}{2\left(p^2s^2-q^2r^2\right)}=\frac{(ps+qr)^2\left(p^2-r^2\right)}{2\left\{p^2\left(p^2+q^2-r^2\right)-q^2r^2\right\}}=\frac{(ps+qr)^2\left(p^2-r^2\right)}{2\left(p^4+p^2q^2-p^2r^2-q^2r^2\right)}$$

$$=\frac{(ps+qr)^2\left(p^2-r^2\right)}{2\left\{p^2\left(p^2+q^2\right)-r^2\left(p^2+q^2\right)\right\}}=\frac{(ps+qr)^2\left(p^2-r^2\right)}{2\left(p^2+q^2\right)\left(p^2-r^2\right)}=\frac{(ps+qr)^2}{2\left(p^2+q^2\right)}$$

$x>0$ より， $x=\dfrac{ps+qr}{\sqrt{2\left(p^2+q^2\right)}}$ ■

(3)別解　⑲で， $a>0$ より

$$a=\sqrt{\frac{p^3s+ps^3+p^2qr+4p^2qs+3pq^2s-q^3r-qr^3-pr^2s-4qr^2s-3qrs^2}{ps-qr}}\quad ■$$

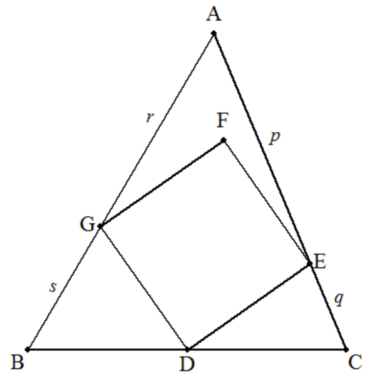
(4)　(21)を用いて

$$\cos A=\frac{p^2+r^2-2x^2}{2pr}=\frac{p^2+r^2-2\times\dfrac{(ps+qr)\left(p^2-r^2\right)}{2(ps-qr)}}{2pr}=\frac{pq-rs}{qr-ps}\quad ■$$

（別のパターン）

△ABC について，BC の中点を D とし，CA 上に点 E を，△ABC 内に点 F を，AB 上に点 G を，四角形 DEFG が正方形になるようにとる。

BC＝a，CA＝b，AB＝c とおくとき，正方形の 1 辺を a,b,c を用いて表せ。



（解）正方形の 1 辺を x， EC＝q，　GB＝s とおくと，AE＝$b-q$　AG＝$c-s$ である。

定理より， $(b-q)^2+q^2=(c-s)^2+s^2$ ･･･①

$$\cos B=\frac{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+s^2-x^2}{2\cdot\dfrac{a}{2}\cdot s}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\qquad\therefore\ \frac{a^2}{4}+s^2-x^2=\frac{s}{2c}\left(a^2-b^2+c^2\right)\cdots②$$

$$\cos C=\frac{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+q^2-x^2}{2\cdot\dfrac{a}{2}\cdot q}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\qquad\therefore\ \frac{a^2}{4}+q^2-x^2=\frac{q}{2b}\left(a^2+b^2-c^2\right)\cdots③$$

①より， $2\left(s^2-q^2\right)=2(cs-bq)+b^2-c^2$ ･･･④

②－③より， $s^2-q^2=\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2c}s-\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}q$ ･･･⑤

⑤を④に代入すると， $2\left(\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2c}s-\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}q\right)=2(cs-bq)+b^2-c^2$

s について解くと， $s=\dfrac{c\left(-a^2+b^2+c^2\right)q-bc\left(b^2-c^2\right)}{b\left(-a^2+b^2+c^2\right)}$ ･･･⑥

⑥を④に代入すると， $q=\dfrac{b\left\{3\left(a^4-2a^2b^2+b^4-a^2c^2-b^2c^2\right)+4\sqrt{3}\left(-a^2+b^2+2c^2\right)S\right\}}{4\left(-a^2+b^2+bc+c^2\right)\left(-a^2+b^2-bc+c^2\right)}$ ･･･⑦

ただし， $S=\dfrac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4}$ である。

⑦を③に代入すると

$$x=\frac{\sqrt{2}S\sqrt{a^6-2a^4\left(b^2+c^2\right)+a^2\left(b^4-5b^2c^2\right)+9b^2c^2\left(b^2+c^2\right)-4\sqrt{3}\left(-a^2+b^2+2c^2\right)\left(-a^2+2b^2+c^2\right)S}}{\left(-a^2+b^2+bc+c^2\right)\left(-a^2+b^2-bc+c^2\right)}\quad ■$$

（補足） $s=\dfrac{c\left\{3\left(a^4-2a^2c^2+c^4-a^2b^2-b^2c^2\right)+4\sqrt{3}\left(-a^2+2b^2+c^2\right)S\right\}}{4\left(-a^2+b^2+bc+c^2\right)\left(-a^2+b^2-bc+c^2\right)}$

（2015/7/11　時岡）