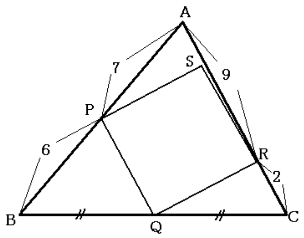
△ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ内接正多角形について

1　はじめに

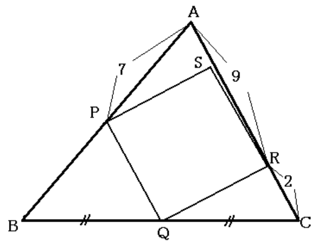
　次の問題は，Website「ヨッシーの算数・数学の部屋」質問・問題に答えるコーナー(平面図形に関する問題)にある。解答を見ると，中学生レベルで求められる。

A 図のように三角形ＡＢＣの内部に正方形ＰＱＲＳが３点Ｐ，Ｑ，Ｒで接していて，ＢＱ＝ＱＣです。このとき，正方形ＰＱＲＳの面積を求めなさい。　　(答)　$\dfrac{136}{5}$

(A 図)



(B 図)



　この問題を，さらに難しくして B 図のようにしたらどうなるだろう。中学生レベルで求められるだろうか。

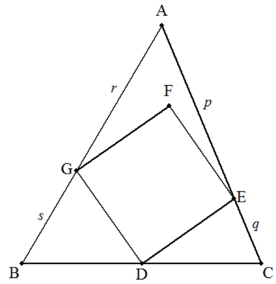
2　この問題を考えて分かったこと

　以下，正方形 PQRS の記号を変えてある。

△ABC について，BC の中点を D とし，CA 上に点 E を，△ABC 内に点 F を，AB 上に点 G を，四角形 DEFG が正方形になるようにとる。AE＝ p ，EC＝ q ，AG＝ r ，GB＝ s とおくと，次が成り立つ。

(1)　$p^2+q^2=r^2+s^2$ （定理）

(2)（正方形の 1 辺）　$\dfrac{ps+qr}{\sqrt{2\left(p^2+q^2\right)}}$



（証明）(1) △ABC 内に点 L を，GB＝GL，GB⊥GL となるようにとると，△GBD≡△GLF（2 辺夾角相等）であるから，

BD＝LF･･･①，∠BDG＝∠LFG･･･②　である。

また，△AGL は直角三角形となるから，

r^2+s^2 ＝AG²＋GL²＝AL²･･･③　である。

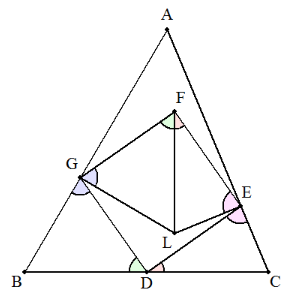
次に，△DCE と△FLE について

DC＝DB＝FL（①より）･･･④

DE＝FE（仮定より）･･･⑤

∠EDC＝180°－（∠BDG＋90°）＝90°－∠BDG

　　　＝∠EFG－∠LFG＝∠EFL･･･⑥



④～⑥より，2 辺夾角相等より，△DCE≡△FLE であるから，EC＝EL･･･⑦

∠CEL＝∠CED＋∠DEL＝∠LEF＋∠DEL＝90°　より

△AEL は直角三角形となるから，p^2+q^2 ＝AE²＋EL²＝AL²･･･⑧

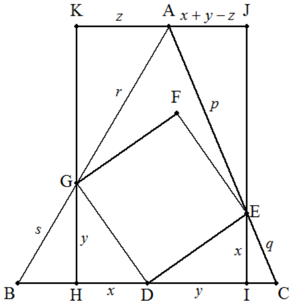
③，⑧より，$p^2+q^2=r^2+s^2$　■

(2) 正方形の 1 辺を x とおく。(1)で，四角形 AGLE は円に内接するから，トレミーの定理より，EG・AL＝AE・GL＋EL・AG が成り立つ。

AE＝ p，EC＝EL＝ q，AG＝ r，GB＝GL＝ s，AL＝ $\sqrt{p^2+q^2}$，EG＝ $\sqrt{2}x$ であるから，

$$\sqrt{2}x\sqrt{p^2+q^2}=ps+qr$$

∴　正方形の 1 辺は，$x=\dfrac{ps+qr}{\sqrt{2\left(p^2+q^2\right)}}$　■



また，右図のように，BC と辺を共有し，E，A，G を通る長方形 HIJK をつくり，相似比と三平方の定理を使って求める方法や，△ABC＝S，凹型四角形 AGFE＝S_1，△BDG＝S_2，△CED＝S_3，正方形の 1 辺を x とおくと，

$\dfrac{1}{2}x^2$ ＝△DEG＝S－（S_2＋S_3＋△AGE）

S_1＋S_2＋S_3＝S－ x^2 ＝四角形 AGLE

となり，(1)の図と面積比を使って求める方法など，中学生レベルで求める方法がいくつかあるが，紙面の関係で割愛する。

内接正方形を内接正三角形，内接正五角形，･･･に変えても似たような定理は得られるだろうか。また，正多角形の 1 辺はどうなるか，次に考えてみる。

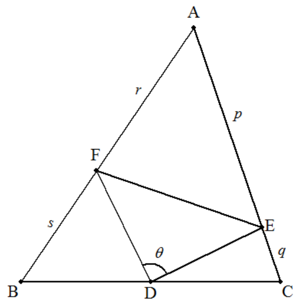
3　△ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ二等辺三角形について（補題）

三角形 ABC の辺 BC の中点を D とし，辺 CA 上に点 E を，AB 上に点 F を，DE＝DF となるようにとる。DE＝DF＝ x，∠FDE＝ θ，AE＝ p，EC＝ q，AF＝ r，FB＝ s とおくと，次が成り立つ。

(1) $\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}p^2+q^2=\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}r^2+s^2$　（定理）

(2) $x=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(ps+qr)\left(p^2-q^2-r^2+s^2\right)}{(ps-qr)}}=\dfrac{ps+qr}{2\sin\dfrac{\theta}{2}\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}p^2+q^2}}$

(3) $\cos A=\dfrac{rs-pq}{ps-qr}$



（証明）EF＝ y とおくと，余弦定理より，$y^2=2x^2(1-\cos\theta)$

$$\cos A=\frac{p^2+r^2-2x^2(1-\cos\theta)}{2pr}=\frac{(p+q)^2+(r+s)^2-a^2}{2(p+q)(r+s)}\text{ より}$$

$$(p+q)(r+s)\left\{p^2+r^2-2x^2(1-\cos\theta)\right\}-pr\left\{(p+q)^2+(r+s)^2-a^2\right\}=0\ \cdots①$$

$$\cos B=\frac{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+s^2-x^2}{2\cdot\dfrac{a}{2}s}=\frac{a^2+(r+s)^2-(p+q)^2}{2a(r+s)}\text{ より}$$

$$\frac{a^2}{4}+s^2-x^2=\frac{s}{2(r+s)}\left\{a^2+(r+s)^2-(p+q)^2\right\}\cdots②$$

$$\cos C=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+q^2-x^2}{2\cdot\frac{a}{2}q}=\frac{a^2+(p+q)^2-(r+s)^2}{2a(p+q)}$$ より

$$\frac{a^2}{4}+q^2-x^2=\frac{q}{2(p+q)}\left\{a^2+(p+q)^2-(r+s)^2\right\}\cdots③$$

②，③はx^2， a^2についての連立２元１次方程式である。

②－③からx^2を消去し， a^2について解く。

$$s^2-q^2=\left\{\frac{s}{2(r+s)}-\frac{q}{2(p+q)}\right\}a^2-\left\{\frac{s}{2(r+s)}+\frac{q}{2(p+q)}\right\}\left\{(p+q)^2-(r+s)^2\right\}$$

$$(ps-qr)a^2=\{s(p+q)+q(r+s)\}\left\{(p+q)^2-(r+s)^2\right\}+2(p+q)(r+s)\left(s^2-q^2\right)\cdots④$$

[1]　$ps-qr=0$のとき

$p:q=r:s$より FE // BC となるから，△ABC は AB=AC の二等辺三角形となる。

よって， $p=r,q=s$より， $\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}p^2+q^2=\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}r^2+s^2$は成り立つ。

[2]　$ps-qr\neq 0$のとき，④から

$$a^2=\frac{p^3s+ps^3+p^2qr+4p^2qs+3pq^2s-q^3r-qr^3-pr^2s-4qr^2s-3qrs^2}{ps-qr}\cdots⑤$$

⑤を③に代入して， x^2について解くと

$$x^2=\frac{p^3s+ps^3+p^2qr+qrs^2-q^3r-qr^3-pq^2s-pr^2s}{4(ps-qr)}\cdots⑥$$

⑤，⑥を①の左辺に代入すると，

$$(p+q)(r+s)\left\{p^2+r^2-2\times\frac{p^3s+ps^3+p^2qr+qrs^2-q^3r-qr^3-pq^2s-pr^2s}{4(ps-qr)}(1-\cos\theta)\right\}$$

$$-pr\left\{(p+q)^2+(r+s)^2-\frac{p^3s+ps^3+p^2qr+4p^2qs+3pq^2s-q^3r-qr^3-pr^2s-4qr^2s-3qrs^2}{ps-qr}\right\}$$

$$=\frac{(p+q)(r+s)(ps+qr)\left\{(1+\cos\theta)p^2+(1-\cos\theta)q^2-(1+\cos\theta)r^2-(1-\cos\theta)s^2\right\}}{2(ps-qr)}=0$$ 　より

$\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}p^2+q^2=\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}r^2+s^2$　が成り立つ。

以上，[1]，[2]より， $\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}p^2+q^2=\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}r^2+s^2$　■

(2)　$s^2=\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}p^2+q^2-\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}r^2$に注意して，⑥を変形すると，

$$x^2=\frac{(ps+qr)\left(p^2-q^2-r^2+s^2\right)}{4(ps-qr)}=\frac{(ps+qr)^2\left(p^2-q^2-r^2+s^2\right)}{4\left(p^2s^2-q^2r^2\right)}=\frac{(ps+qr)^2}{4\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}p^2+q^2\right)}$$

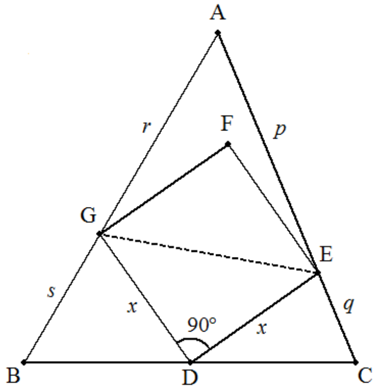
$x>0$より， $x=\dfrac{ps+qr}{2\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}p^2+q^2}}$　■

(3) ⑤を $\cos A=\dfrac{(p+q)^2+(r+s)^2-a^2}{2(p+q)(r+s)}$ に代入して整理すると，$\cos A=\dfrac{rs-pq}{ps-qr}$ ■

4　△ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ内接正多角形について

3 の補題を使うと，次のとおり求めることができる。

(1)　内接正方形の場合（$\theta=90°$ の場合）

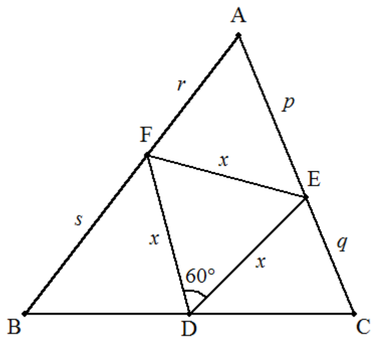


(1) $p^2+q^2=r^2+s^2$

(2) $x=\dfrac{ps+qr}{\sqrt{2(p^2+q^2)}}$

(3) $\cos A=\dfrac{rs-pq}{ps-qr}$

(2)　内接正三角形の場合（$\theta=60°$ の場合）



(1) $3p^2+q^2=3r^2+s^2$

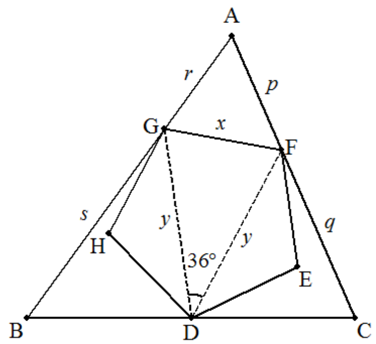
(2) $x=\dfrac{ps+qr}{\sqrt{3p^2+q^2}}$

(3) $\cos A=\dfrac{rs-pq}{ps-qr}$

(3)　内接正五角形の場合

まず，△ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ内接正五角形 DEFGH の場合の図を書いてみる。次の 3 通りを考えれば十分である。

［1］△ABC の 3 辺にある正五角形の頂点が D，F，G の場合（$\theta=36°$ の場合）



正五角形の 1 辺を x，対角線を y とすると，

$y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x$

となる。

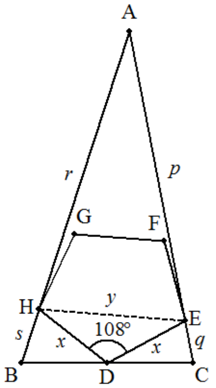
［2］，［3］も同様。

(1) $(5+2\sqrt{5})p^2+q^2=(5+2\sqrt{5})r^2+s^2$

(2) $x=\dfrac{(1+\sqrt{5})(ps+qr)}{2\sqrt{(5+2\sqrt{5})p^2+q^2}}$

(3) $\cos A=\dfrac{rs-pq}{ps-qr}$

［2］ △ABC の 3 辺にある正五角形の頂点が D，E，H の場合（$\theta = 108°$ の場合）

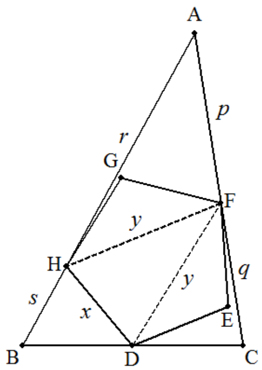


(1) $\left(5+2\sqrt{5}\right)p^2+q^2=\left(5+2\sqrt{5}\right)r^2+s^2$

(2) $x=\dfrac{\left(-1+\sqrt{5}\right)(ps+qr)}{2\sqrt{\left(5-2\sqrt{5}\right)p^2+q^2}}$

(3) $\cos A=\dfrac{rs-pq}{ps-qr}$

［3］ △ABC の 3 辺にある正五角形の頂点が D，F，H の場合



3 の方程式①，②，③を修正して求める。

(1)

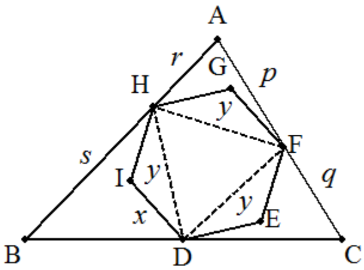
$$2\left(13+5\sqrt{5}\right)p^2+8\left(2+\sqrt{5}\right)pq+2\left(7+3\sqrt{5}\right)q^2$$
$$=4\left(5+2\sqrt{5}\right)r^2+\left\{\left(3+\sqrt{5}\right)s-\left(1+\sqrt{5}\right)r\right\}^2$$

(2)

$$x^2=\frac{(ps+qr)\left(p^2-q^2-r^2+s^2\right)}{\left(5+\sqrt{5}\right)(ps-qr)-\left(1+\sqrt{5}\right)(pr-qs)}$$

(4) 内接正六角形の場合

［1］ △ABC の 3 辺にある正六角形の頂点が D，F，H の場合（$\theta = 60°$ の場合）

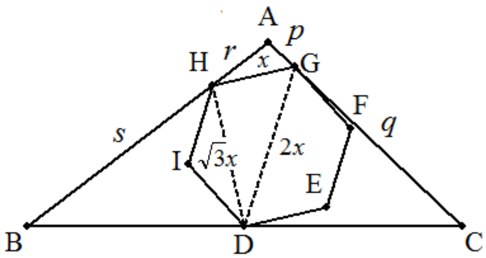


(1) $3p^2+q^2=3r^2+s^2$

(2) $x=\dfrac{ps+qr}{\sqrt{3\left(3p^2+q^2\right)}}$

(3) $\cos A=\dfrac{rs-pq}{ps-qr}$

［2］ △ABC の 3 辺にある正六角形の頂点が D，G，H の場合



3 の方程式①，②，③を修正して求める。

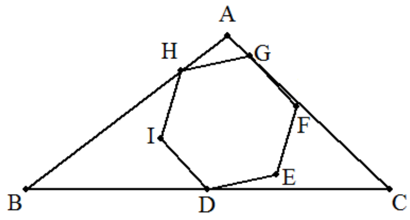
(1) $12p^2+(p+q)^2=12r^2+(r-s)^2$

(2) $x^2=\dfrac{(ps+qr)\left(p^2-q^2-r^2+s^2\right)}{2(7ps+qs-7qr-pr)}$

(3) $\cos A=-\dfrac{(p+q)^2+12(pq-rs)+(r-s)^2}{2(7ps+qs-7qr-pr)}$

【具体例】

△ABC の辺 BC の中点を D とし，三角形内に正六角形 DEFGHI を図のように頂点 G, H が三角形の辺上にあるようにつくる。AG＝2，GC＝13，AH＝4 のとき，正六角形の 1 辺を求めよ。



（答）（1 辺）$2\sqrt{\frac{39}{7}}$ （補足）HB＝13，BC＝$2\sqrt{\frac{1027}{7}}$

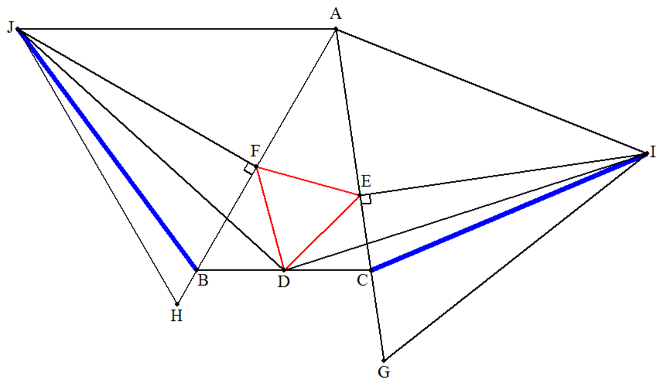
5　終わりに

はじめに，$p^2+q^2=r^2+s^2$ という定理を発見したが，この定理はどこかで紹介されているだろうか。

また，内接正方形の場合は, 中学生レベルで $p^2+q^2=r^2+s^2$ を証明することができた。

内接正三角形の場合も中学生レベルで $3p^2+q^2=3r^2+s^2$ を証明することができないか考えているが，現時点で分からない。

たとえば，右図で，AE の延長上に点 G を 2AE＝AG となるように，AF の延長上に点 H を 2AF＝AH となるようにそれぞれとる。図のように，AG，AH を 1 辺とする正三角形 AGI, AHJ をつくる。



CI²＝$3p^2+q^2$，BJ²＝$3r^2+s^2$

となるから，CI＝BJ を示すことができれば証明できたことになるのだが･･･。

【参考文献】

［1］Website「ヨッシーの算数・数学の部屋」質問・問題に答えるコーナー
（平面図形に関する問題）http://yosshy.sansu.org/faq/chu_heimen.htm
［2］時岡郁夫の Website（http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/）のこだわり数学
76.△ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ内接正方形問題(PDF)
77.△ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ内接正三角形問題(PDF) など

（2015/8/5　時岡）