

漸化式の一般項考

1 はじめに

隣接 3 項間の漸化式から一般項を求める方法（一般的な求め方）

$a_1 = a, a_2 = b, \quad a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0 \quad (n=1,2,3,\dots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

ただし、2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ は相異なる 2 つの解をもつものとする。

(解) $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0 \dots \textcircled{1}$

特性方程式 $x^2 + px + q = 0$ の 2 つの解を α, β とおく。

このとき、漸化式 $\textcircled{1}$ を変形すると

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \dots \textcircled{2}$$

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ より数列 $\{a_{n+1} - \beta a_n\}$ は、初項 $a_2 - \beta a_1 = b - a\beta$ 、公比 α の等比数列であるから

$$a_{n+1} - \beta a_n = (b - a\beta)\alpha^{n-1} \dots \textcircled{4}$$

同様に $\textcircled{3}$ から $a_{n+1} - \alpha a_n = (b - a\alpha)\beta^{n-1} \dots \textcircled{5}$

$\textcircled{4} - \textcircled{5}$ を計算すると

$$(\alpha - \beta)a_n = (b - a\beta)\alpha^{n-1} - (b - a\alpha)\beta^{n-1}$$

よって

$$a_n = \frac{1}{\alpha - \beta} \{(b - a\beta)\alpha^{n-1} - (b - a\alpha)\beta^{n-1}\} \dots \text{(答)}$$

この結果から、 $a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}$ の形になることが分かる。ただし、 A, B は n に無関係な定数である。

同様に、隣接 4 項間の漸化式 $a_{n+3} + pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0$ を特性方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の 3 つの解

α, β, γ を用いて $a_{n+3} - \alpha a_{n+2} - \beta(a_{n+2} - \alpha a_{n+1}) = \gamma\{a_{n+2} - \alpha a_{n+1} - \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)\}$ と変形して求める方法は大

変であるが、 $a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + C\gamma^{n-1}$ の形になると推察される。

2 隣接 $(i+1)$ 項間の漸化式 から一般項 a_n の求め方

$$a_k (k=1,2,3,\dots,i) \text{ の値は既知, } a_{n+i} + p_1 a_{n+i-1} + p_2 a_{n+i-2} + \dots + p_{i-1} a_{n+1} + p_i a_n = 0 \quad (n=1,2,3,\dots) \quad \cdots \textcircled{6}$$

から一般項 a_n を求める方法を紹介したい。

ただし, $i=1,2,3,\cdots; p_1, p_2, \cdots, p_i$ は定数とし,

$$\text{特性方程式 } x^i + p_1x^{i-1} + p_2x^{i-2} + \cdots + p_{i-1}x + p_i = 0 \cdots \textcircled{7}$$

が相異なる i 個の解 $\alpha_k (k=1,2,3,\dots,i)$ を持つ場合についてである。

いま, $a_n = A_1 \alpha_1^{n-1} + A_2 \alpha_2^{n-1} + A_3 \alpha_3^{n-1} + \cdots + A_i \alpha_i^{n-1} \cdots$ ⑧とおく。

$$\alpha_1 \text{ は ⑦ の解であるから } \alpha_1^i + p_1 \alpha_1^{i-1} + p_2 \alpha_1^{i-2} + \cdots + p_{i-1} \alpha_1 + p_i = 0$$

両辺に $A_1 \alpha_1^{n-1}$ を掛けると

$$A_1\alpha_1^{n+i-1} + p_1A_1\alpha_1^{n+i-2} + p_2A_1\alpha_1^{n+i-3} + \cdots + p_{i-1}A_1\alpha_1^n + p_iA_1\alpha_1^{n-1} = 0 \cdots (1)$$

同様に, $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i$ も⑦の解であるから

$$A_2\alpha_2^{n+i-1} + p_1A_2\alpha_2^{n+i-2} + p_2A_2\alpha_2^{n+i-3} + \cdots + p_{i-1}A_2\alpha_2^n + p_iA_2\alpha_2^{n-1} = 0 \cdots (2)$$

$$A_3\alpha_3^{n+i-1} + p_1A_3\alpha_3^{n+i-2} + p_2A_3\alpha_3^{n+i-3} + \dots + p_{i-1}A_3\alpha_3^n + p_iA_3\alpha_3^{n-1} = 0 \dots (3)$$

.....

$$A_i \alpha_i^{n+i-1} + p_1 A_i \alpha_i^{n+i-2} + p_2 A_i \alpha_i^{n+i-3} + \dots + p_{i-1} A_i \alpha_i^n + p_i A_i \alpha_i^{n-1} = 0 \dots (i)$$

(1)~(i)を辺々加えると

$a_{n+i} + p_1 a_{n+i-1} + p_2 a_{n+i-2} + \cdots + p_{i-1} a_{n+1} + p_i a_n = 0$ となり, ⑧は漸化式⑥を満たすことが証明された。

ここで, $A_k(k=1,2,3,\dots,i)$ は, 次の連立 i 元 1 次方程式の解である。

$$\begin{cases} a_1 = A_1 + A_2 + \cdots + A_i \\ a_2 = A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \cdots + A_i\alpha_i \\ a_3 = A_1\alpha_1^2 + A_2\alpha_2^2 + \cdots + A_i\alpha_i^2 \\ \dots\dots\dots \\ a_j = A_1\alpha_1^{j-1} + A_2\alpha_2^{j-1} + \cdots + A_i\alpha_i^{j-1} \end{cases}$$

3 具体例の紹介

(1) 隣接 3 項間 $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ の場合 (a_1, a_2 は既知)

【例】

条件 $a_1=1, a_2=2, 3a_{n+2}-5a_{n+1}+2a_n=0$ ($n=1, 2, 3, \dots$) によって定められる
数列 $\{a_n\}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 第 3 項 a_3 を求めよ。
- (2) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと、 b_{n+1} を b_n の式で表せ。
- (3) 一般項 a_n を n の式で表せ。

(2009 早稲田大)

【(3)の解答例】 特性方程式 $3x^2 - 5x + 2 = 0$ を解くと、 $x = \frac{2}{3}, 1$

$$a_n = A\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + B \cdot 1^{n-1} = A\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + B \text{ とおくと } a_1 = A + B = 1, a_2 = \frac{2}{3}A + B = 2 \text{ より, } A = -3, B = 4$$

$$\text{よって } a_n = -3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 4 = 4 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \dots (\text{答})$$

$$(\text{補足}) \{a_n\}: 1, 2, \frac{8}{3}, \frac{28}{9}, \frac{92}{27}, \frac{292}{81}, \frac{908}{243}, \frac{2788}{729}, \frac{8492}{2187}, \frac{25732}{6561}, \dots$$

一般に、隣接 3 項間 $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ の場合 (a_1, a_2 は既知)

特性方程式 $x^2 + px + q = 0$ の 2 つの解を α, β とすると、

$$a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}, \quad A = \frac{a_2 - \beta a_1}{\alpha - \beta}, B = \frac{a_2 - \alpha a_1}{\beta - \alpha} \text{ である。}$$

この公式を使うと

(解) 特性方程式 $3x^2 - 5x + 2 = 0$ を解くと、 $x = \frac{2}{3}, 1$

$$a_n = A\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + B \cdot 1^{n-1} = A\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + B \text{ とおくと}$$

$$A = \frac{2 - 1 \cdot 1}{\frac{2}{3} - 1} = -3, B = \frac{2 - \frac{2}{3} \cdot 1}{1 - \frac{2}{3}} = 4$$

$$\text{よって } a_n = -3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 4 = 4 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \dots (\text{答})$$

(2) 隣接 4 項間 $a_{n+3} + pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0$ の場合 (a_1, a_2, a_3 は既知)

【例】 $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, \quad a_{n+3} + a_{n+2} - 4a_{n+1} - 4a_n = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

(解) 特性方程式 $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ を解くと $x = 2, -2, -1$

$$a_n = A \cdot 2^{n-1} + B(-2)^{n-1} + C(-1)^{n-1} \text{ とおくと}$$

$$a_1 = A + B + C = 1, \quad a_2 = 2A - 2B - C = 1, \quad a_3 = 4A + 4B + C = 2$$

$$\text{これらを連立させて解くと} \quad A = \frac{7}{12}, B = -\frac{1}{4}, C = \frac{2}{3}$$

よって

$$a_n = \frac{7}{12} \cdot 2^{n-1} - \frac{1}{4}(-2)^{n-1} + \frac{2}{3}(-1)^{n-1} = \frac{1}{12} \{7 \cdot 2^{n-1} - 3(-2)^{n-1} + 8(-1)^{n-1}\} \dots \text{ (答)}$$

(補足) $\{a_n\}: 1, 1, 2, 6, 6, 26, 22, 106, 86, 426, \dots$

一般に、隣接 4 項間 $a_{n+3} + pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0$ の場合 (a_1, a_2, a_3 は既知)

特性方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とおくと,

$$a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + C\gamma^{n-1}$$

$$A = \frac{a_3 - (\beta + \gamma)a_2 + \beta\gamma a_1}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}, B = \frac{a_3 - (\gamma + \alpha)a_2 + \gamma\alpha a_1}{(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)}, C = \frac{a_3 - (\alpha + \beta)a_2 + \alpha\beta a_1}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \text{ である。}$$

この公式を使うと

(解) 特性方程式 $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ を解くと $x = 2, -2, -1$

$$a_n = A \cdot 2^{n-1} + B(-2)^{n-1} + C(-1)^{n-1} \text{ とおくと}$$

$$A = \frac{2 - (-2 - 1) \cdot 1 + (-2)(-1) \cdot 1}{(2 + 2)(2 + 1)} = \frac{7}{12}, B = \frac{2 - (-1 + 2) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 1}{(-2 + 1)(-2 - 2)} = -\frac{1}{4}, C = \frac{2 - (2 - 2) \cdot 1 + 2(-2) \cdot 1}{(-1 - 2)(-1 + 2)} = \frac{2}{3}$$

よって

$$a_n = \frac{7}{12} \cdot 2^{n-1} - \frac{1}{4}(-2)^{n-1} + \frac{2}{3}(-1)^{n-1} = \frac{1}{12} \{7 \cdot 2^{n-1} - 3(-2)^{n-1} + 8(-1)^{n-1}\} \dots \text{ (答)}$$

(3) 隣接 5 項間 $a_{n+4} + pa_{n+3} + qa_{n+2} + ra_{n+1} + sa_n = 0$ の場合 (a_1, a_2, a_3, a_4 は既知)

【例】 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, \quad a_{n+4} - 10a_{n+3} + 35a_{n+2} - 50a_{n+1} + 24a_n = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

(解) 特性方程式 $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$ を解くと $x = 1, 2, 3, 4$

$a_n = A \cdot 1^{n-1} + B \cdot 2^{n-1} + C \cdot 3^{n-1} + D \cdot 4^{n-1}$ とおくと

$$\begin{cases} a_1 = A + B + C + D = 1 \\ a_2 = A + 2B + 3C + 4D = 2 \\ a_3 = A + 4B + 9C + 16D = 3 \\ a_4 = A + 8B + 27C + 64D = 4 \end{cases}$$

これらを連立させて解くと $A = -\frac{5}{6}, B = 3, C = -\frac{3}{2}, D = \frac{1}{3}$

よって

$$a_n = -\frac{5}{6} \cdot 1^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} - \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{3} \cdot 4^{n-1} = \frac{1}{12} (4^n - 2 \cdot 3^{n+1} + 9 \cdot 2^{n+1} - 10) \cdots (\text{答})$$

(補足) $\{a_n\}: 1, 2, 3, 4, 11, 72, 463, 2564, 12771, 59392, \dots$

一般に、隣接 5 項間 $a_{n+4} + pa_{n+3} + qa_{n+2} + ra_{n+1} + sa_n = 0$ の場合 (a_1, a_2, a_3, a_4 は既知)

特性方程式 $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ の 4 つの解を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とすると、

$$a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + C\gamma^{n-1} + D\delta^{n-1},$$

$$A = \frac{a_4 - (\beta + \gamma + \delta)a_3 + (\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta)a_2 - \beta\gamma\delta a_1}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)}, B = \frac{a_4 - (\gamma + \delta + \alpha)a_3 + (\gamma\delta + \delta\alpha + \alpha\gamma)a_2 - \gamma\delta\alpha a_1}{(\beta - \gamma)(\beta - \delta)(\beta - \alpha)},$$

$$C = \frac{a_4 - (\delta + \alpha + \beta)a_3 + (\delta\alpha + \alpha\beta + \beta\delta)a_2 - \delta\alpha\beta a_1}{(\gamma - \delta)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}, D = \frac{a_4 - (\alpha + \beta + \gamma)a_3 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)a_2 - \alpha\beta\gamma a_1}{(\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma)}$$

である。

この公式を使うと

(解) 特性方程式 $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$ を解くと $x = 1, 2, 3, 4$

$a_n = A \cdot 1^{n-1} + B \cdot 2^{n-1} + C \cdot 3^{n-1} + D \cdot 4^{n-1}$ とおくと

$$A = \frac{4 - (2+3+4) \cdot 3 + (2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2) \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1}{(1-2)(1-3)(1-4)} = -\frac{5}{6}, B = \frac{4 - (3+4+1) \cdot 3 + (3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3) \cdot 2 - 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1}{(2-3)(2-4)(2-1)} = 3,$$

$$C = \frac{4 - (4+1+2) \cdot 3 + (4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4) \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}{(3-4)(3-1)(3-2)} = -\frac{3}{2}, D = \frac{4 - (1+2+3) \cdot 3 + (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1) \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1}{(4-1)(4-2)(4-3)} = \frac{1}{3}$$

よって

$$a_n = -\frac{5}{6} \cdot 1^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} - \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{3} \cdot 4^{n-1} = \frac{1}{12} (4^n - 2 \cdot 3^{n+1} + 9 \cdot 2^{n+1} - 10) \cdots (\text{答})$$

(4) 隣接 6 項間 $a_{n+5} + pa_{n+4} + qa_{n+3} + ra_{n+2} + sa_{n+1} + ta_n = 0$ の場合 (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 は既知)

【例】 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 5, \quad a_{n+5} - 3a_{n+4} - 5a_{n+3} + 15a_{n+2} + 4a_{n+1} - 12a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

(解) 特性方程式 $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0$ を解くと $x = \pm 1, \pm 2, 3$

$a_n = A \cdot 3^{n-1} + B \cdot 2^{n-1} + C \cdot 1^{n-1} + D(-1)^{n-1} + E(-2)^{n-1}$ とおくと

$$\begin{cases} a_1 = A + B + C + D + E = 1 \\ a_2 = 3A + 2B + C - D - 2E = 2 \\ a_3 = 9 + 4B + C + D + 4E = 3 \\ a_4 = 27A + 8B + C - D - 8E = 4 \\ a_5 = 81A + 16B + C + D + 16E = 5 \end{cases}$$

これらを連立させて解くと $A = -\frac{3}{20}, B = 1, C = \frac{1}{3}, D = -\frac{1}{4}, E = \frac{1}{15}$

よって

$$a_n = -\frac{3}{20} \cdot 3^{n-1} + 1 \cdot 2^{n-1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}(-1)^{n-1} + \frac{1}{15}(-2)^{n-1} = \frac{1}{60} \{20 + 15(-1)^n + 15 \cdot 2^{n+1} + (-2)^{n+1} - 3^{n+1}\} \dots \text{(答)}$$

(補足) $\{a_n\}: 1, 2, 3, 4, 5, -6, -41, -208, -711, -2474, \dots$

一般に、隣接 6 項間 $a_{n+5} + pa_{n+4} + qa_{n+3} + ra_{n+2} + sa_{n+1} + ta_n = 0$ の場合 (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 は既知)

特性方程式 $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$ の 5 つの解を $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ とおくと、

$$a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + C\gamma^{n-1} + D\delta^{n-1} + E\varepsilon^{n-1}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{a_5 - (\beta + \gamma + \delta + \varepsilon)a_4 + (\beta\gamma + \beta\delta + \beta\varepsilon + \gamma\delta + \gamma\varepsilon + \delta\varepsilon)a_3 - (\gamma\delta\varepsilon + \beta\delta\varepsilon + \beta\gamma\varepsilon + \beta\gamma\delta)a_2 + \beta\gamma\delta\varepsilon a_1}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\alpha - \varepsilon)} \\ &= \frac{a_5 - a_4 \Sigma \beta + a_3 \Sigma \beta\gamma - a_2 \Sigma \gamma\delta\varepsilon + \beta\gamma\delta\varepsilon a_1}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\alpha - \varepsilon)} \end{aligned}$$

と表すと、

$$\begin{aligned} B &= \frac{a_5 - a_4 \Sigma \gamma + a_3 \Sigma \gamma\delta - a_2 \Sigma \delta\varepsilon\alpha + \gamma\delta\varepsilon\alpha a_1}{(\beta - \gamma)(\beta - \delta)(\beta - \varepsilon)(\beta - \alpha)}, C = \frac{a_5 - a_4 \Sigma \delta + a_3 \Sigma \delta\varepsilon - a_2 \Sigma \varepsilon\alpha\beta + \delta\varepsilon\alpha\beta a_1}{(\gamma - \delta)(\gamma - \varepsilon)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}, \\ D &= \frac{a_5 - a_4 \Sigma \varepsilon + a_3 \Sigma \varepsilon\alpha - a_2 \Sigma \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma a_1}{(\delta - \varepsilon)(\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma)}, E = \frac{a_5 - a_4 \Sigma \alpha + a_3 \Sigma \alpha\beta - a_2 \Sigma \beta\gamma\delta + \alpha\beta\gamma\delta a_1}{(\varepsilon - \alpha)(\varepsilon - \beta)(\varepsilon - \gamma)(\varepsilon - \delta)} \end{aligned}$$

である。

4 隣接 $(i+1)$ 項間の漸化式の一般項について

漸化式 $a_{n+i} + p_1 a_{n+i-1} + p_2 a_{n+i-2} + \cdots + p_{i-1} a_{n+1} + p_i a_n = 0$ ($n=1,2,3,\cdots$, $p_1, p_2, \cdots, p_i$ は定数) について, 特

性方程式 $x^i + p_1 x^{i-1} + p_2 x^{i-2} + \cdots + p_{i-1} x + p_i = 0$ の相異なる i 個の解が α_k ($k=1,2,\cdots,i$) であるとする。

数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は, $a_n = \sum_{k=1}^i A_k \alpha_k^{n-1}$,

$$A_k = \frac{a_i - a_{i-1} \Sigma \alpha_1 + a_{i-2} \Sigma \alpha_1 \alpha_2 - a_{i-3} \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \cdots + (-1)^{i-1} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{k-1} \alpha_{k+1} \cdots \alpha_i a_1}{(\alpha_k - \alpha_1)(\alpha_k - \alpha_2) \cdots (\alpha_k - \alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k+1}) \cdots (\alpha_k - \alpha_i)} \quad (k=1,2,\cdots,i)$$

で与えられることが, 「3 具体例の紹介」 から帰納的に分かる。

ただし, $\Sigma \alpha_1$ とは, α_k を含まない 1 つの解の総和,

$\Sigma \alpha_1 \alpha_2$ とは, α_k を含まない異なる 2 つの解の積の総和,

$\Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ とは, α_k を含まない異なる 3 つの解の積の総和, $\cdots$, を表すものとする。

5 おわりに

高校の教科書には隣接 2 項間, 隣接 3 項間の漸化式から一般項を求める方法が紹介されている。また, 入試問題では解答時間の制約もあり, 隣接 4 項間以上の漸化式から一般項を求めさせる問題は出題されていないようである。

与えられた問題をただ解くだけでなく, 係数を文字にして公式を作ることによって, 漸化式の一般項の様子が分かり, その結果, 隣接 4 項間, 隣接 5 項間の漸化式でも簡単に一般項を求める方法に気がつく。このようなことも指導している。

【参考文献】

- [1] 三訂版 6 ヶ年教育をサポートする体系数学 4 (数研出版)
- [2] 高等学校数学科用 数学 B (数研出版)

(2014/1/23 時岡)